Orthogonale Projektion

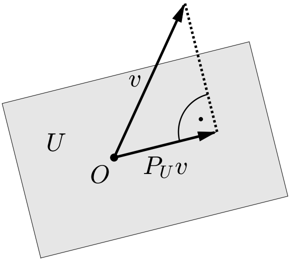
Die orthogonale Projektion

$$V \ni v \mapsto P_U(v) \in U$$

auf einen Unterraum U eines Vektorraums V ist durch die Orthogonalitätsbedingung

$$\langle u, v - P_U(v) \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

charakterisiert.



Ist $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine orthogonale Basis von U, so besitzt P_U die Darstellung

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle u_k, v \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \,.$$

Insbesondere gilt für $V = \mathbb{R}^n$

$$P_U v = \sum_{k=1}^{m} |u_k|^{-2}\, u_k\, (u_k^{\mathrm{t}} v)$$

mit der Projektionsmatrix $\sum_k |u_k|^{-2}\, u_k u_k^{\mathrm{t}}$. Für $v = \mathbb{C}^n$ ist der transponierte Vektor u^{t} durch den adjungierten Vektor u^* (Transposition und komplexe Konjugation) zu ersetzen.

Beispiel

Projektion $P_H w$ von $w = (-7, 2, 1, -6)^{\mathrm{t}}$ auf den von den orthogonalen Basisvektoren

$$u = (-2, 1, 2, 0)^{\mathrm{t}},\ v = (0, 2, -1, 2)^{\mathrm{t}}$$

aufgespannten Unterraum von $\mathbb{R}^4$

$u \perp v \quad \Longrightarrow$

$$P_U w = \frac{u^{\mathrm{t}} w}{|u|^2} u + \frac{v^{\mathrm{t}} w}{|v|^2} v$$

Koeffizient von u

$$\frac{(-2, 1, 2, 0)^{\mathrm{t}},\ (-7, 2, 1, -6)^{\mathrm{t}}}{|(-2, 1, 2, 0)^{\mathrm{t}}|^2} = \frac{14 + 2 + 2 + 0}{4 + 1 + 4 + 0} = 2$$

Koeffizient von v

$$\frac{(0, 2, -1, 2)^{\mathrm{t}},\ (-7, 2, 1, -6)^{\mathrm{t}}}{|(0, 2, -1, 2)^{\mathrm{t}}|^2} = \frac{0 + 4 - 1 - 12}{0 + 4 + 1 + 4} = -1$$

$\rightsquigarrow$ Projektion

$$P_U w = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$