Orthogonale Basis

Eine Basis $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eines Vektorraums V ist orthogonal, wenn

$$\langle u_j, u_k \rangle = 0, \quad j \neq k\,.$$

Eine normierte orthogonale Basis, d.h. $|u_k| = 1 \,\forall\, k$, wird als Orthonormalsystem oder Orthonormalbasis bezeichnet.
Die Elemente v des Vektorraums besitzen die Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k\,, \quad c_k = \frac{\langle u_k, v \rangle}{|u_k|^2}\,.$$

Für die Koeffizienten c_k gilt

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2\,.$$

Ist die Basis normiert, so fallen die Terme $|u_k|^2$ weg, d.h. es gelten die einfacheren Formeln

$$c_k = \langle u_k, v \rangle, \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2\,.$$

Für einen komplexen Vektorraum ist die Reihenfolge der Argumente im Skalarprodukt von Bedeutung. Bei der Berechnung der Koeffizienten muss $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich des Argumentes v linear sein.

Beweis

$u_1, \ldots, u_n$ Basis $\quad \Longrightarrow \quad$ Existenz von Skalaren $c_1, \ldots, c_n$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

Skalarprodukt mit u_k, Orthogonalität der Basis ($\langle u_k, u_j \rangle = 0$, $j \neq k$) und Linearität $\quad \rightsquigarrow$

$$\langle u_k, v \rangle = \langle u_k, c_k u_k \rangle = c_k \langle u_k, u_k \rangle \quad \text{bzw.} \quad c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

Identität für die Koeffizienten $\quad \widehat{=} \quad$ Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

Beweis durch Ausmultiplizieren von

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle$$

unter Berücksichtigung von

$$\langle c_j u_j, c_k u_k \rangle = 0, \quad j \neq k$$

Beispiel

Darstellung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}^t$ bezüglich der orthogonalen Basis

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^t, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 \end{pmatrix}^t$$

(i) Koeffizienten und Basisdarstellung:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\langle u_1, v\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{1\cdot 8 + 3\cdot 4}{1^2+3^2} = \frac{20}{10} = 2 \\ c_2 &= \frac{\langle u_2, v\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = \frac{-6\cdot 8 + 2\cdot 4}{6^2+2^2} = \frac{-40}{40} = -1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Linearkombination $v = c_1 u_1 + c_2 u_2$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Quadratsumme der Koeffizienten:
Überprüfung der Identität $c_1^2|u_1|^2 + c_2^2|u_2|^2 = |v|^2$

$$2^2\cdot 10 + (-1)^2\cdot 40 = 80 = 8^2 + 4^2 = 80 \quad \checkmark$$

Beispiel

Darstellung des Vektors $v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ bezüglich der orthonormalen Basis

$$u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad u_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$$

$|u_1| = |u_2| = |u_3| = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Koeffizienten $c_k = \langle u_k, v \rangle$, d.h.

$$\begin{aligned} v &= \langle u_1, v\rangle u_1 + \langle u_2, v\rangle u_2 + \langle u_1, v\rangle u_3 \\ &= \frac{-1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 8\cdot 3}{9} u_1 + \frac{-4+7-12}{9} u_2 + \frac{-9}{9} u_2 \\ &= 3\begin{pmatrix} 1/9 \\ 4/9 \\ 8/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/9 \\ 7/9 \\ -4/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/9 \\ -4/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrolle der Quadratsumme der Koeffizienten:

$$|3|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 \overset{!}{=} |v|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 3^2 \quad \checkmark$$