Volumen eines Parallelepipeds

Der Betrag der Determinante einer reellen Matrix $A = (a_1, \ldots, a_n)$ stimmt mit dem n-dimensionalen Volumen des von den Spalten a_k von A aufgespannten Parallelepipeds überein:

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{\sum_{k=1}^{n} s_k a_k :\ 0 \leq s_k \leq 1\right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right)\,.$$

Beweis

Das orientierte Volumen

$$\operatorname{vol}_* A = \operatorname{sign}(\det A)\operatorname{vol}(A[0,1]^n)$$

besitzt alle drei definierenden Eigenschaften der Determinante (Multilinearität, Antisymmetrie, Normierung).

$\Longrightarrow$

$$\operatorname{vol}_* A = \det A$$

Beispiel

Alternative Berechnung der Determinante einer 3×3-Matrix $A = (u, v, w)$ mit den Spalten

$$u^{\mathrm{t}} = (2, 1, 1),\ v^{\mathrm{t}} = (1, 2, 1),\ w^{\mathrm{t}} = (1, 1, 2)$$

(i) Spatprodukt:
$\det(u, v, w) = [u, v, w] = u^{\mathrm{t}}\,(b \times c) \quad \rightsquigarrow$

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (2,1,1)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4$$

(ii) ε-Tensor:
$\det(u, v, w) = \sum_j \sum_k \sum_\ell \varepsilon_{j,k,\ell}\, u_j v_k w_\ell \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \det(u, v, w) \;&=\; \varepsilon_{1,2,3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \varepsilon_{1,3,2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{2,1,3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad + \varepsilon_{2,3,1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{3,1,2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{3,2,1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ &=\; 8 - 2 - 2 + 1 + 1 - 2 = 4 \end{aligned}$$