Norm einer Matrix

Einer Vektornorm ist die Matrixnorm

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

zugeordnet. Zusätzlich zu den Normeigenschaften (Positivität, Homogenität, Dreiecksungleichung) gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

für Produkte von Matrizen, d.h. die zugeordnete Matrixnorm ist submultiplikativ. Diese Eigenschaft müssen andere Matrixnormen, die ebenfalls verwendet werden können, nicht besitzen. Es wird jedoch in Verbindung mit dem Matrix/Vektor-Kalkül gefordert, dass eine Matrixnorm kompatibel mit der Vektornorm ist, d.h.

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| .$$

Diese schwächere Bedingung als Submultiplikativität ist für die zugeordnete Matrixnorm eine unmittelbare Folgerung aus der Definition.

Beweis

(i) Positivität: ✓

(ii) Homogenität:

$$\begin{aligned}\|sA\| &= \max_{\|x\|=1} \|sAx\| = \max_{\|x\|=1} |s|\|Ax\| \\ &= |s| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |s|\|A\|\end{aligned}$$

(iii) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

(iv) Submultiplikativität:
Für eine Nullmatrix B ($\|B\| = 0$) ist die Aussage trivial, da in diesem Fall AB ebenfalls die Nullmatrix ist.

Andernfalls gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \underset{(*)}{=} \sup_{x: Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\|\end{aligned}$$

Die Einschränkung bei der Umformung $(*)$ ist unproblematisch, da $Bx = 0 \implies ABx = 0$.

Maximumnorm

Der Maximumnorm für Vektoren,

$$\|v\|_\infty = \max_k |v_k|\,,$$

ist für Matrizen die Zeilensummennorm zugeordnet:

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_j \sum_k |a_{j,k}|\,.$$

Dabei ist zu beachten, dass im allgemeinen $\|A\|_\infty \neq \|A^{\mathrm{t}}\|_\infty$. Insbesondere gilt für einen Zeilenvektor $(x_1, \ldots, x_n)$ (d.h. eine $1 \times n$-Matrix)

$$\|x\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,.$$

Beweis

Definition der zugeorneten Norm $\implies$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \max_j \left|\sum_k a_{j,k} x_k\right| \leq \max_j \sum_k |a_{j,k}|$$

Gleichheit gilt für

$$x_k = \operatorname{sign}\, a_{j,k}$$

mit j einem Index, für den die Zeilensumme maximal ist.

Euklidische Matrixnorm

Der Euklidischen Norm (2-Norm) für Vektoren,

$$|v| = \left(\sum_k |v_k|^2 \right)^{1/2} \quad ,$$

ist die Matrixnorm

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \; \lambda \,\text{ist Eigenwert von}\, A^* A\}$$

zugeordnet. Die Wurzeln der Eigenwerte der symmetrischen, positiv definiten Matrix A^*A sind die Singulärwerte von A.
Kompatibel mit der Euklidischen Norm ist ebenfalls die Frobenius-Norm

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \quad ,$$

d.h. es gilt

$$|Ax| \leq \|A\|_F |x| \, .$$

Diese Norm ist jedoch nicht submultiplikativ.

Beweis

(i) Zugeordnete Norm:
benutze die Singulärwertzerlegung

$$A = USV^*, \quad U, V \,\text{unitär}, \; S \,\text{diagonal}$$

Invarianz der Euklidischen Norm bei unitären Transformationen $\implies$

$$\|A\|_2^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|^2}{|x|^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{|USV^* x|^2}{|x|^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{|SV^* x|^2}{|V^* x|^2} = \sup_{y \neq 0} \frac{|Sy|^2}{|y|^2}$$

$|Sy|^2 = \sum_{k=1}^r |s_k y_y|^2$ mit r dem Rang und $s_1 \geq \cdots \geq s_r$ den Singulärwerten von A

$$\implies \quad \|A\|_2^2 = \sup_y \frac{\sum_k |s_k y_k|^2}{\sum_k |y_k|^2} \leq \max_k s_k = s_1$$

mit Gleichheit für $y = (1, 0, \ldots)^{\mathrm{t}}$

(ii) Frobenius-Norm:
Kompatibilität $\Longleftarrow$ Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|Ax|^2 &= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} x_k \right)^2 \le \sum_j \left(\sqrt{\sum_k |a_{j,k}|^2} \sqrt{\sum_k |x_k|^2} \right)^2 \\
&= \left(\sum_j \sum_k |a_{j,k}|^2 \right) |x|^2 = \|A\|_F^2 |x|^2
\end{aligned}$$

Beispiel

verschiedene Normen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Zeilensummennorm:

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_k |a_{j,k}| = \max\{|-1|, |1|, |-2| + |2|\} = \max\{1, 1, 4\} = 4$$

Gleichheit in der Ungleichung $\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ für $x_k = \operatorname{sign} a_{3,k}$, d.h. $x = (-1, 1)^{\mathrm{t}}$:

$$\|Ax\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 4, \quad \|x\|_\infty = 1$$

(ii) Euklidische Norm:
$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} :\ \lambda \, \text{ist Eigenwert von } A^{\mathrm{t}}A\}$

$$A^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$, denn

$$A^{\mathrm{t}}A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{t}}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Gleichheit in der Ungleichung $|Ax| \le \|A\|_2 |x|$ für $x = (1, -1)^{\mathrm{t}}$:

$$|Ax| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18}, \quad |x| = \sqrt{2}$$

und $\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$ $\quad\checkmark$

(iii) Frobenius-Norm:
$\|A\|_F = \sqrt{1 + 1 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$