Norm

Eine Norm auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

- Positivität:
$$\|v\| > 0 \quad \text{für } v \neq 0$$
- Homogenität:
$$\|sv\| = |s|\|v\|$$
- Dreiecksungleichung:
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Diese Identitäten gelten für alle $u, v \in V$ und $s \in \mathbb{R}$ bzw. $s \in \mathbb{C}$.

Mit einem Skalarprodukt ist die Norm

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V$$

assoziiert. Für diese spezielle Norm werden oft einfache Betragsstriche verwendet. Insbesondere ist für $V = \mathbb{R}^n$ und $V = \mathbb{C}^n$

$$|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.$$

Mit Hilfe einer Norm kann durch

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

ein Abstand zwischen zwei Vektoren definiert werden.

Beweis

Überprüfung der Normeigenschaften für die einem Skalarprodukt zugeordnete Norm

- Positivität und Homogenität ✓
- Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$
\begin{aligned}
|u+v|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}_{\in\mathbb{R}} + \langle v,v\rangle \\
&\leq |u|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + |v|^2 \\
&\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\
&= (|u|+|v|)^2
\end{aligned}
$$

  durch Wurzelziehen.

Beispiel

Normen für die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

- 2-Norm oder Euklidische Norm

$$\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

z.B.

$$\|(2, -1, 2)^{\mathrm{t}}\|_2 = \sqrt{4 + 1 + 4} = 9$$

Spezielle Notation für die, dem kanonischen Skalarprodukt zugeordnete Norm: $\|z\|_2 = |z|$

- Maximum-Norm

$$\|z\|_\infty = \max_k |z_k|$$

z.B:

$$\begin{aligned} \|(2+3\mathrm{i},\ 3-4\mathrm{i})^{\mathrm{t}}\|_\infty &= \max(\sqrt{2^2+3^2},\ \sqrt{3^2+4^2}) \\ &= \max(\sqrt{13},\ \sqrt{25}) = 5 \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: $\|z\|_{\infty,w} = \max_k (w_k |z_k|)$ mit Gewichten $w_k > 0$

- 1-Norm

$$\|z\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

z.B.

$$\|(1,\ -2,\ 3)^{\mathrm{t}}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 1 + 2 + 3 = 6$$