Matrix

Eine $m \times n$-Matrix besteht aus $m \cdot n$ Elementen, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$A = (a_{j,k}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} .$$

Man bezeichnet

$$u_j^{\mathrm{t}} = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n}), \quad v_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix}$$

als j-ten Zeilen- bzw. k-ten Spaltenvektor und schreibt ebenfalls

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{\mathrm{t}} \\ \vdots \\ u_m^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} = (v_1, \ldots, v_n) .$$

Speziell ist eine $1 \times n$-Matrix ein Zeilen- und eine $m \times 1$-Matrix ein Spaltenvektor.

Für Elemente in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bilden die $m \times n$-Matrizen einen Vektorraum mit elementweise definierter Addition und skalarer Multiplikation:

$$C = A + B \iff c_{j,k} = a_{j,k} + b_{j,k}, \quad C = sA \iff c_{j,k} = sa_{j,k} \,.$$

Verschiedene Matrixdimensionen

- Zeilen- und Spaltenvektor

$$(11, 12, 13), \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix}$$

- Komplexe 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

- Rationale 2×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1/1 & 1/2 & 1/3 \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Matrix einer linearen Abbildung

Eine lineare Abbildung $L: V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen mit den Basen $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ ist durch die Bilder der Basisvektoren

$$L(e_k) = a_{1,k} f_1 + \cdots + a_{m,k} f_m, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

eindeutig bestimmt. Sie besitzt die Matrixdarstellung

$$w = L(v) \quad \Longleftrightarrow \quad w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} v_k, \quad j = 1, \ldots, m,$$

wobei v_k und w_j die Koordinaten von v und $w = L(v)$ bzgl. der Basen E und F bezeichnen. In der k-ten Spalte der Matrix A stehen also die Koordinaten von $L(e_k)$ bezüglich der Basis F.

Beweis

L ist aufgrund der Bedingungen für Linearität durch die Bilder einer Basis eindeutig bestimmt:

$$w = L(v) = L\left(\sum_k v_k e_k\right) = \sum_k v_k L(e_k) = \sum_k \sum_j v_k a_{j,k} f_j$$

mit den Basiskoeffizienten v_k von v.
Basisdarstellung von w

$$w = \sum_j w_j f_j$$

Vergleich der Koordinaten der Basisvektoren $\quad\rightsquigarrow\quad$ Matrixdarstellung

$$w_j = \sum_{k=1}^n a_{j,k} v_k$$

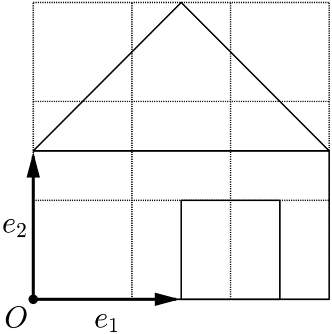
Beispiel

Lineare Abbildungen

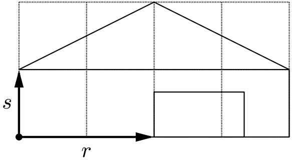
$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

der Ebene festgelegt durch die Bilder der Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



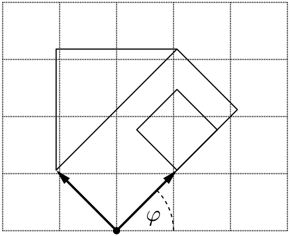
(i) Skalierung mit Faktoren r und s:



$$L(e_1) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \; L(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

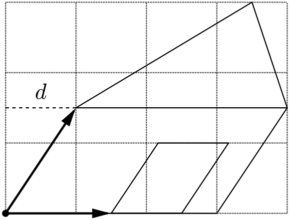
(ii) Drehung um einen Winkel φ:



$$L(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},\ L(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

(iii) Scherung um d in horizontaler Richtung:



$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ L(e_2) = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Interpolationsmatrizen

(i) Auswertung einer linearen Funktion p an den Punkten $x = 0, 1$:

$$L: \; p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}, \quad p(x) = a_0 + a_1 x$$

Matrix bzgl. der Monombasis $p_1 : \; x \mapsto 1$, $p_2 : \; x \mapsto x$

$$\big(L(p_1), L(p_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix bzgl. der Basis $p_1 : \; x \mapsto 1 - x$, $p_2 : \; x \mapsto x$

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(0) \\ p_1(1) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Auswertung eines Polynoms vom Grad $\leq n$ an m Stützstellen $x = x_1, \ldots, x_m$:
Monombasis, $q_k : x \mapsto x^k$, $k = 0, \ldots, n \quad \leadsto \quad$ Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}$$

Spalte k: Auswertung des Monoms q_k an den Punkten $x_1, \ldots, x_m$
Zeile j: Auswertung der Monome q_k, $k = 0, \ldots, n$, am Punkt x_j

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \Longrightarrow$

$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} v_{j,k} a_k$$