Matrix-Multiplikation

Das Produkt einer $\ell \times m$-Matrix A und einer $m \times n$-Matrix B ist die $\ell \times n$-Matrix

$$C = AB, \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} \,,$$

d.h. zur Definition von $c_{i,k}$ werden die Produkte der Elemente aus Zeile i von A und Spalte k von B summiert:

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,k} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \mathbf{c_{i,k}} & \cdots & c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & \cdots & c_{\ell,k} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i,m}} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & \cdots & c_{\ell,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \mathbf{b_{1,k}} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & \mathbf{b_{m,k}} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Dafür ist essentiell, dass die Spaltenanzahl m von A mit der Zeilenanzahl von B (ebenfalls m) übereinstimmt.

Die Matrix-Multiplikation entspricht der Komposition der linearen Abbildungen

$$P: u \mapsto v = Bu, \quad Q: v \mapsto w = Av\,,$$

d.h. $Q \circ P: u \mapsto ABu$.

Die Multiplikation von Matrizen ist im allgemeinen nicht kommutativ.

Ein Spezialfall der Matrix-Multiplikation ist die Multiplikation mit einem Vektor.

- Für einen Spaltenvektor b ($n = 1$) ist der Spaltenvektor $c = Ab$ eine Linearkombination der Spalten von A:

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_j \iff \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{\ell,1} \end{pmatrix} + \cdots + b_m \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ \vdots \\ a_{\ell,m} \end{pmatrix}.$$

  Insbesondere erhält man bei Multiplikation mit dem j-ten Einheitsvektor die j-te Spalte von A.

- Entsprechend gilt für einen Zeilenvektor a ($\ell = 1$)

$$c = aB, \quad c_k = \sum_{j=1}^{m} a_j b_{j,k}$$

bzw.

$$(c_1, \ldots, c_n) = a_1(b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}) + \cdots + a_m(b_{m,1}, \ldots, b_{m,n}),$$

und Multiplikation mit dem k-ten Einheitsvektor ergibt die k-te Zeile von B.

Beweis

Komposition der durch

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} v_j, \quad v_j = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} u_k$$

definierten Abbildungen $\quad \rightsquigarrow$

$$w_i = \sum_j \sum_k a_{i,j} b_{j,k} u_k = \sum_k \left[\sum_j a_{i,j} b_{j,k} \right] u_k$$

mit $[\dots] = c_{i,k}$ den Elementen der Matrix $C = AB$

Beispiel

Matrix-Produkte verschiedener Dimensionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Strassens Multiplikationen sparende Matrix-Multiplikation
[Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969), 357–361]

Berechnung des Produkts $C = AB$ zweier 2×2-Matrizen mit 7 anstelle der üblichen 8 Multiplikationen

$$\begin{aligned}
p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned}
c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &&= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &&= p_4 + p_5 \\
c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &&= p_6 + p_7 \\
c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &&= p_2 - p_3 + p_5 - p_7
\end{aligned}$$

Rekursive Anwendung der Konstruktion in Blockform auf Matrizen der Dimension $n = 2^k$

$\rightsquigarrow$ Reduktion der Multiplikationen von n^3 auf $O(n^{\log_2 7})$

Verbesserung: $O(n^{2.376\dots})$
[D. Coppersmith, S. Winograd: Matrix Multiplication via arithmetic progressions, J. Symb. Comp. 9 (1990), 251–280]

Vermutung: $O(n^2)$ möglich (optimaler Exponent noch unbekannt)

Die Methode hat heute keine praktische Bedeutung mehr, da auf modernen Computern Multiplikation und Addition fast gleich schnell sind.

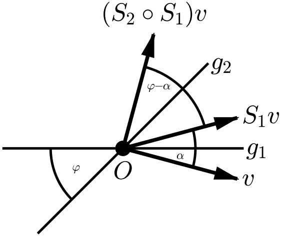
Beispiel

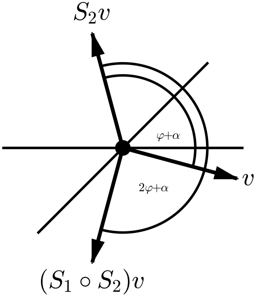
Spiegelungen S_1 und S_2 an Geraden g_1 und g_2

$$g_1 \parallel d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 \parallel d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \sphericalangle(g_1, g_2) = \pi/4$$

Bei Hintereinanderausführung der Spiegelungen ist die Reihenfolge relevant: $(S_2 \circ S_1)v \neq (S_1 \circ S_2)v$

$$(S_2 \circ S_1)v : \text{ Drehung um } 2\varphi, \quad (S_1 \circ S_2)v : \text{ Drehung um } -2\varphi$$





Matrixdarstellung ($S \to A$, Spalten: Bilder der Einheitsvektoren)

$$S_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Produktmatrizen der beiden verschiedenen Doppelspiegelungen

$$S_2 \circ S_1 : \; A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 \circ S_2 : \; A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$