Linearkombination

Für Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_m$ eines K-Vektorraums V bezeichnet man

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_m v_m = \sum_{k=1}^{m} s_k v_k$$

mit Skalaren $s_k \in K$ als Linearkombination der Elemente v_k.

Die Menge aller solchen Linearkombinationen nennt man die lineare Hülle der v_k:

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \left\{ \sum_{k=0}^{m} s_k v_k : \; s_k \in K \right\} .$$

Allgemeiner definiert man für eine Menge $U \subseteq V$

$$\operatorname{span}(U) = \left\{ \sum_{k} s_k u_k : \; s_k \in K, \; u_k \in U \right\}$$

als die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus der Menge U. Die so gewonnene lineare Hülle von U ist ein Unterraum von V.

Beispiel

Linearkombinationen in $\mathbb{R}^n$

(i) Der Vektor $v = (1, 2, 3)^{\mathrm{t}}$ ist eine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (3, 4, 5)^{\mathrm{t}},\ v_2 = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}\,,$$

denn $v = v_1 - 2v_2$.

(ii) Der Vektor $v = (1, 0)^{\mathrm{t}}$ ist keine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (0, 1)^{\mathrm{t}},\ v_2 = (0, 2)^{\mathrm{t}}\,,$$

denn jede Linearkombination von v_1 und v_2 hat die Form $(0, x)^{\mathrm{t}}$.

(iii) Der Vektor $v = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{t}}$ ist auf verschiedene Art als Linearkombination von

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{t}},\ v_2 = (0, 2, 2, 0)^{\mathrm{t}},\ v_3 = (0, 0, 3, 3)^{\mathrm{t}},\ v_4 = (4, 0, 0, 4)^{\mathrm{t}}$$

darstellbar:

$$v = s(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4), \quad s \in \mathbb{R}$$

Beispiel

Lineare Hüllen in $\mathbb{R}^3$

(i) $v_1 = (1,-1,0)^{\mathrm{t}}$, $v_2 = (0,1,-1)^{\mathrm{t}}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(v_1, v_2) &= \{s_1(1,-1,0)^{\mathrm{t}} + s_2(0,1,-1)^{\mathrm{t}} :\ s_k \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(s_1, s_2 - s_1, -s_2)^{\mathrm{t}} :\ s_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene, orthogonal zu $(1,1,1)^{\mathrm{t}}$
(ii) $v_1 = (1,-1,0)^{\mathrm{t}}$, $v_2 = (0,1,-1)^{\mathrm{t}}$, $v_3 = (-1,0,1)^{\mathrm{t}}$:
gleiche lineare Hülle, da

$$v_3 = -v_1 - v_2$$

(Darstellung von v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2)
keine eindeutige Darstellung der Vektoren in $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$, z.B.:

$$(0,0,0)^{\mathrm{t}} = s(v_1 + v_2 + v_3), \quad s \in \mathbb{R}$$