Lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = b$$

mit einer Koeffizientenmatrix $A = (a_{j,k})$, zu bestimmenden Unbekannten x_k und einer rechten Seite b.

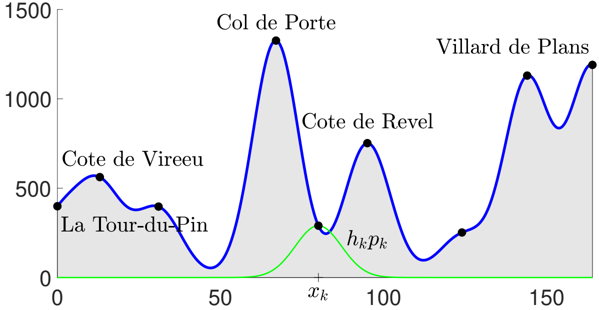
Das lineare Gleichungssystem ist homogen, wenn $b = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$, andernfalls bezeichnet man es als inhomogen.

Besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung (im Allgemeinen für $m > n$), so nennt man es überbestimmt. Man spricht in diesem Fall auch von einem Ausgleichsproblem. Ein lineares Gleichungssystem mit keiner eindeutigen Lösung (im Allgemeinen für $m < n$) wird als unterbestimmt bezeichnet.

Beispiel

Approximation eines Höhenprofils einer Etappe der Tour-de-France aus den Daten

x_j	0	13	31	67	80	95	124	144	164
h_j	399	562	397	1326	290	752	252	1130	1190



Ansatz

$$h(x) \approx p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x)$$

mit Exponentialfunktionen

$$p_k(x) = \exp(-(x - x_k)^2/100)$$

als Basisfunktionen

Vorteil der Basiswahl: starkes Abklingen von p_k für $|x - x_k| \to \infty \quad \rightsquigarrow$ keine globale Auswirkung von Änderungen

Interpolationsbedingungen

$$h_j = p(x_j) = \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x_j), \quad j = 1, \ldots, n$$

$\Longleftrightarrow \quad$ lineares Gleichungssystem

$$Ac = b$$

mit $a_{j,k} = p_k(x_j)$ und $b_j = h_j$

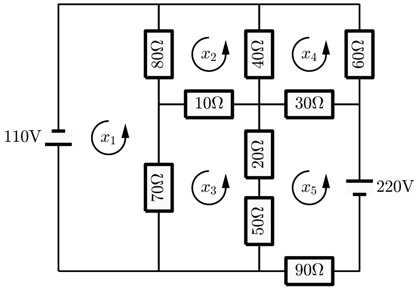
Beispiel

Elektrischer Schaltkreis

x_k: Kreisströme mit Fließrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn

$R_{j,k}$: gemeinsamer Widerstand der j-ten und k-ten Schleife

U_j: angelegte Spannungen



Ohmsches und Kirchhoffsches Gesetz $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\sum_{j\sim 0} x_j R_{j,0} + \sum_{j\sim k} (x_j - x_k) R_{j,k} = U_j$$

$j \sim k$: j-te und k-te Schleife haben einen gemeinsamen Widerstand durchflossen vom Strom $x_j - x_k$

$R_{j,0}$, $j \sim 0$: Widerstände, die nur in der j-ten Schleife liegen

Daten in der Abbildung $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}$$

Diagonale: Summe der zu einer Schleife gehörigen Widerstände

$a_{j,k}$: negativer gemeinsamer Widerstand der Schleifen j und k

Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}\,,$$

mit einer $m \times n$-Koeffizientenmatrix A ist ein Unterraum U des Vektorraums der n-Tupel $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{t}}$, $U = \operatorname{Kern} A$.

Besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

eine Lösung v, so gilt für die allgemeine Lösung

$$x \in v + U\,,$$

d.h. die Lösungsmenge ist ein affiner Unterraum.

Insbesondere kann also ein inhomogenes lineares Gleichungssystem entweder keine ($\nexists v$), eine ($U = \{0\}$) oder unendlich viele ($\dim U > 0$) Lösungen besitzen.

Beweis

(i) Für Lösungen x, y des homogenen linearen Gleichungssystems gilt

$$A(x+y) = Ax + Ay = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}} + (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}} = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}}$$
$$A(sx) = sAx = s(0,\ldots,0)^{\mathrm{t}} = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}}\,,$$

d.h. die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems bildet einen Unterraum U.

(ii) Für eine Lösung v des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt

$$A(x-v) = Ax - Av = b - b = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}}\,,$$

d.h. $u = x - v \in U$.

$\rightsquigarrow$ Lösungsmenge $v + U$ (affiner Unterraum)

Beispiel

Verschiedene Typen linearer Gleichungssysteme

(i) Eindeutige Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & + & 2x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \end{array}$$

$\rightsquigarrow \quad x_2 = 2,\ x_1 = -1$

(ii) Unendlich viele Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

$x_2 = t \implies x_3 = 1 - t,\ x_1 = 1 - t$, d.h. $x = \underbrace{(1,0,1)^{\mathrm{t}}}_{v} + \underbrace{t(-1,1,-1)^{\mathrm{t}}}_{\in U}$

U: Lösungsraum des homogenen Gleichungssytems ($\dim U = 1$, Gerade mit Richtung $(-1,1,-1)^{\mathrm{t}}$)

(iii) Keine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & & & = & 0 \end{array}$$

Gleichungen 1 und 3, $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$, sind inkonsistent zu Gleichung 2.