# Lineare Unabhängigkeit

Elemente $v_1, \dots, v_m$ eines Vektorraums $V$ sind linear abhängig, wenn ein Element $v_k$ als Linearkombination der anderen darstellbar ist, d.h.

$$s_1 v_1 + \cdots + s_m v_m = 0_V \tag{*}$$

mit mindestens einem der Skalare $s_k \neq 0$.

Andernfalls bezeichnet man $v_1, \dots, v_m$ als linear unabhängig. In diesem Fall folgt aus $\sum_k s_k v_k = 0_V$ dass $s_1 = \cdots = s_m = 0$.

Für Vektoren $v_k \in \mathbb{R}^n$ ist die Bedingung (*) ein homogenes lineares Gleichungssystem, das bei linearer Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_m$ nur die triviale Lösung $s_1 = \cdots = s_m = 0$ besitzt.

## Beispiel

### Lineare Unabhängigkeit von Vektoren in der Ebene

(i) Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner der beiden ein Vielfaches des anderen ist.

konkrete Beispiele:

- $(1,0)^\mathrm{t}$, $(1,1)^\mathrm{t}$ sind linear unabhängig, denn

$$s(1,0)^\mathrm{t} + t(1,1)^\mathrm{t} = (0,0)^\mathrm{t} \quad \Longrightarrow \quad s = t = 0$$

- $(2,3)^\mathrm{t}$, $(-4,-6)^\mathrm{t}$ sind linear abhängig, denn

$$(-2)(2,3)^\mathrm{t} = (-4,-6)^\mathrm{t} \quad \Longrightarrow \quad 2(2,3)^\mathrm{t} + (-4,6)^\mathrm{t} = (0,0)^\mathrm{t}\,,$$

  d.h. $\exists$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors

(ii) Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.

$$ru + sv + tw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ unterbestimmtes, homogenes lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} ru_1 & + & sv_1 & + & tw_1 & = & 0 \\ ru_2 & + & sv_2 & + & tw_2 & = & 0 \end{array}$$

für $r, s, t$, das immer eine nichttriviale Lösung besitzt.

konkretes Beispiel:

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $r = \lambda$, $s = -2\lambda$ und $t = \lambda$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

# Beispiel

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren im Raum

(i) Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, wenn sie parallel sind, d.h. wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen ist.

(ii) Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, wenn zwei Vektoren parallel sind oder wenn ein Vektor in der von den beiden anderen Vektoren aufgespannten Ebene liegt.

(iii) Vier und mehr Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

Test für lineare Unabhängigkeit:
$s_1 = \cdots = s_n = 0$ ist die einzige Lösung des homogenes linearen Gleichungssystems

$$s_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konkrete Fälle:

- $u = (0,1,2)^{\mathrm{t}}$, $v = (1,2,3)^{\mathrm{t}}$ sind linear unabhängig, da $u \nparallel v$
- (ii) $u = (1,0,0)^{\mathrm{t}}$, $v = (2,3,0)^{\mathrm{t}}$, $w = (4,5,6)^{\mathrm{t}}$ sind linear unabhängig, da

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad r = s = t = 0$$

- (iii) $(1,0,0)^{\mathrm{t}}$, $(0,2,0)^{\mathrm{t}}$, $(0,0,3)^{\mathrm{t}}$, $(4,5,6)^{\mathrm{t}}$ sind linear abhängig, da

$$5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$