Lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung $L : V \longmapsto W$ zwischen K-Vektorräumen V und W besitzt folgende Eigenschaften.

- Additivität: $L(u+v) = L(u) + L(v)$
- Homogenität: $L(sv) = sL(v)$

Dabei sind u, v beliebige Elemente von V und s beliebige Skalare in K. Insbesondere gilt $L(0_V) = 0_W$ und $L(-v) = -L(v)$.

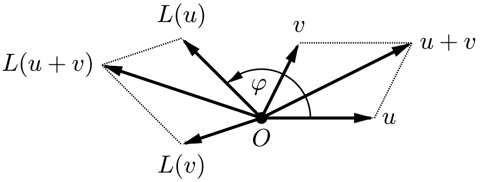
Aufgrund der beiden definierenden Eigenschaften ist eine lineare Abbildung L eindeutig durch die Bilder $L(b_k)$ einer Basis $\{b_1, b_2, \ldots\}$ von V bestimmt.

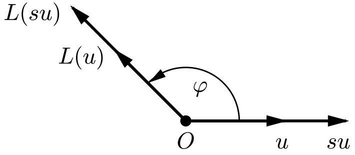
Oft werden bei linearen Abbildungen die Klammern weggelassen, d.h. man schreibt Lu anstelle von $L(u)$.

Beispiel

Elementare lineare Abbildungen der Ebene

(i) Drehung um einen Winkel φ:

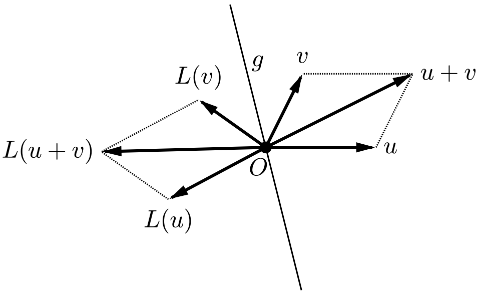


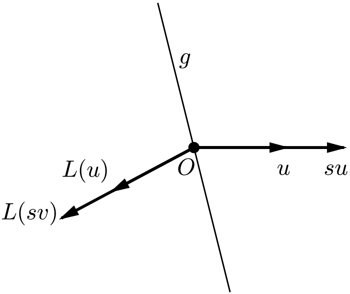


Vertauschbarkeit von Addition und skalarer Multiplikation ✓

- gedrehte Vektorsumme $L(u+v)$ = Summe der gedrehten Vektoren $L(u)$, $L(v)$
- gedrehtes Vektorvielfaches $L(su)$ = Vielfaches des gedrehten Vektors $sL(u)$

(ii) Spiegelung:





Vertauschbarkeit von Addition und skalarer Multiplikation ✓

$$L(u+v) = L(u) + L(v), \quad L(su) = sL(u)$$

(iii) Verschiebung:
nicht linear, denn beispielsweise für

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s = 2$$

gilt

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq (3,1) = T(u) + T(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(su) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3,0) \neq (4,0) = sT(u) = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. T ist weder additiv noch homogen

Beispiel

Abbildungen reeller Funktionen

Abbildung	additiv	homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \lvert f \rvert$	–	–
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	–	–
$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	–	X

additive aber nicht homogene Abbildung:

$$T : f \mapsto \operatorname{Re} f, \quad f \text{ komplexwertig}$$

nicht homogen, da

$$T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}\,T(f)$$