Jordan-Form

Jede $n \times n$-Matrix A lässt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation auf die Blockdiagonalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

bringen. Der ℓ-te Jordanblock ist eine $n_\ell \times n_\ell$-Matrix der Form

$$J_\ell = \begin{pmatrix} j_{i_\ell, i_\ell} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_\ell & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_\ell & 1 \\ 0 & & & & \lambda_\ell \end{pmatrix},$$

mit einem Eigenwert λ_ℓ von A und der i_ℓ-ten Spalte von Q einem zugehörigen Eigenvektor.

Bis auf Permutationen der Blöcke ist die Jordan-Form eindeutig.

Ist die Matrix A diagonalisierbar, d.h. existiert eine Basis aus Eigenvektoren, so treten keine Einsen auf der Nebendiagonale auf. Alle Jordanblöcke sind in diesem Fall 1×1-Matrizen, $J_\ell = \lambda_\ell$.

Nicht-triviale Jordanblöcke zu einem Eigenwert λ_ℓ existieren genau dann wenn die algebraische Vielfachheit von λ_ℓ größer als die geometrische Vielfachheit ist. Die Anzahl dieser Jordanblöcke entspricht der Dimension des Eigenraums V_{λ_ℓ}, d.h. der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu λ_ℓ.

Beispiel

verschiedene Jordan-Formen $J = Q^{-1}AQ$ für eine 2×2-Matrix A

(i) Zwei einfache Eigenwerte λ und ϱ:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad Q = (v, w)$$

mit v und w Eigenvektoren zu λ und ϱ

(ii) Doppelter Eigenwert λ mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren v und w:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A\,,$$

denn mit $Q = (v, w)$ ist

$$A = QJQ^{-1} = Q(\lambda E)Q^{-1} = \lambda E\,,$$

jeder Vektor ist Eigenvektor zu λ

(iii) Doppelter Eigenwert λ mit nur einem, bis auf Vielfache eindeutig bestimmten Eigenvektor v:

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q = (v, w)\,,$$

mit einem Hauptvektor w

$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1 \quad \Longrightarrow$

Ein Eigenvektor v ist mit einer nicht-trivialen Gleichung des homogenen Systems $(A - \lambda E)v = 0$ bestimmbar, die andere Gleichung ist redundant.

Bestimmung von w aus der zweiten Spalte der Identität

$$QJ = AQ \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda v, v + \lambda w) = (Av, Aw)\,,$$

d.h. $v = (A - \lambda E)w$

Beispiel

Jordan-Form der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom

$$p_A(\lambda) = \underbrace{\begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -9 & 8-\lambda \end{vmatrix}}_{A-\lambda E} = (-4-\lambda)(8-\lambda)+36 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$$

doppelte Nullstelle $\rightsquigarrow$ Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 2
lineares Gleichungssystem für einen Eigenvektor v

$$(A-2E)v = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \quad v = (2,3)^{\mathrm{t}}$

kein zweiter linear unabhängiger Eigenvektor (geometrische Vielfachheit von λ gleich 1) $\quad\rightsquigarrow\quad$ Jordanform

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad Q = (v, w)$$

Bestimmung eines Hauptvektors w aus der zweiten Spalte der Identität

$$QJ = AQ \quad \Longleftrightarrow \quad (2v, v + 2w) = (Av, Aw)$$

d.h.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}}_{A-2E} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \quad w = (1, 2)^{\mathrm{t}}$

Probe

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} = A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Beispiel

verschiedene Jordan-Formen

$$J = Q^{-1}AQ, \quad Q = (u, v, w)$$

für eine 3×3-Matrix A

(i) Paarweise verschiedene Eigenwerte λ, ϱ, σ:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

(ii) Doppelter Eigenwert λ:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}$$

Zweiter Fall:

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

Bestimmung von Eigenvektoren u und w und einem Hauptvektor v durch Lösen der Gleichungssysteme

$$(A - \lambda E)u = \underline{0}, \quad u = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)w = \underline{0}, \quad \underline{0} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}$$

(iii) Dreifacher Eigenwert λ:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Zweiter Fall:

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

Bestimmung eines Hauptvektors v durch Lösen von

$$(A - \lambda E)^2 v = \underline{0}, \quad (A - \lambda E)v \neq \underline{0}$$

zugehöriger Eigenvektor: $u = (A - \lambda E)v$
Ein weiterer linear unabhängiger Eigenvektor w erfüllt

$$(A - \lambda E)w = \underline{0}, \quad w \perp u$$

Dritter Fall:

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

Bestimmung eines Eigenvektors u und von zwei Hauptvektoren v und w durch Lösen von

$$(A - \lambda E)u = \underline{0}, \quad u = (A - \lambda E)v, \quad v = (A - \lambda E)w$$

Beispiel

Jordan-Form der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Eigenwerte:
Entwickeln von $\det(A - \lambda E)$ nach der ersten Zeile $\quad\rightsquigarrow$
charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27 \\ &= (\lambda+3)^2(3-\lambda) \end{aligned}$$

Nullstellen: $\lambda_1 = -3$ (doppelt), $\lambda_2 = 3$ (einfach)

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda_1 E) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$\implies$ bis auf Vielfache nur ein Eigenvektor u zu $\lambda = -3$

$\Longrightarrow$ ein nicht-trivialer Jordanblock, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad Q = (u, v, w)$$

mit u und w Eigenvektoren zu -3 und 3

(ii) Eigenvektoren und Hauptvektor:

- $\lambda_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - (-3)E)u = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow$ $u = (-2, 2, 1)^{\mathrm{t}}$ ist ein Eigenvektor

- $\lambda_2 = 3$:
  analog $(0, 0, 0)^{\mathrm{t}} = (A - 3E)w \quad \rightsquigarrow \quad w = (2, 1, 2)^{\mathrm{t}}$

Bestimmung eines Hauptvektors v aus der zweiten Spalte der Identität

$$QJ = AQ \quad \Longleftrightarrow \quad (-3u, u - 3v, 3w) = (Au, Av, Aw)$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = u = Av + 3v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ Transformationsmatrix

$$Q = (u, v, w) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

14 mögliche Belegunsstrukturen für Jordan-Normalformen von 4×4-Matrizen

(i) Vier verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

(ii) Ein zweifacher Eigenwert λ_1 und zwei einfache Eigenwerte λ_2, λ_3:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(iii) Zwei zweifache Eigenwerte λ_1, λ_2:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(iv) Ein dreifacher Eigenwert λ_1 und ein einfacher Eigenwert λ_2:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(v) Ein vierfacher Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$