Inverse Matrix

Die mit einer quadratischen Matrix A assoziierte lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ ist invertierbar, wenn

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \det A \neq 0\,.$$

In diesem Fall bezeichnet A^{-1} die Matrix der inversen linearen Abildung, d.h.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

mit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

der Einheitsmatrix.

Für die Multiplikation, Transposition und Bildung adjungierter inverser Matrizen gilt

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$,
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, $A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$.

Beweis

(i) Kriteria für Invertierbarkeit:
Matrix-Form der Bedingung Kern $L = 0_V$ für allgemeine lineare Abbildungen $L:\ V \to W \quad \rightsquigarrow \quad$ erstes Kriterium
Die Äquivalenz zum Determinanten-Kriterium folgt aus der Theorie linearer Gleichungssysteme:
$\det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Ax = (0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$ hat nur die triviale Lösung $x = (0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$

(ii) Regeln für inverse Matrizen:

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ folgt aus
$$(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$
- Zum Beweis von $A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}} = E$ setze $B = A^{-1}$, $C(j,k) = c_{j,k}$ und berechne das Element (i,k) der linken Seite:
$$\begin{aligned}(A^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}})(i,k) &= \sum_j A^{\mathrm{t}}(i,j)B^{\mathrm{t}}(j,k) = \sum_j A(j,i)B(k,j) \\ &= (BA)(k,i) = E(k,i) = E(i,k)\end{aligned}$$

- Analog erhält man für das Element (i,k) von A^*B^*

$$\sum_j A^*(i,j)B^*(j,k) = \sum_j \overline{A(j,i)}\,\overline{B(k,j)}$$

$$\overline{\sum_j B(k,j)A(j,i)} = \overline{(BA)(k,i)} = \overline{E(k,i)} = E(i,k)$$

Beispiel

Inverse spezieller Matrizen

- Diagonalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Bilden der Kehrwerte der Diagonalelemente

- Dreiecks-Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

  Erhaltung der Struktur

- Voll besetzte Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  Berechnung durch Lösen eines linearen Gleichungssystems