Inverse Abbildung

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn Kern $L = 0_V$, d.h. nur das Nullelement von V wird auf das Nullelement von W abgebildet:

$$Lv = 0_W \quad \Longrightarrow \quad v = 0_V \,.$$

In diesem Fall kann durch

$$w \mapsto v, \quad w = L(v)\,,$$

eine inverse Abbildung $L^{-1} : \operatorname{Bild} L \to V$ definiert werden, die ebenfalls linear ist. Insbesondere gilt

$$(L^{-1} \circ L)v = v, \quad (L \circ L^{-1})w = w$$

für alle $v \in V$ und $w \in \operatorname{Bild} L$.

Beweis

(i) Injektivität von L:

- L injektiv $\implies$ 0_V ist einziges Urbild von 0_W, d.h. Kern $L = 0_V$
- Kern $L = 0_V \wedge L(v_1) = L(v_2)$
  $\implies 0_W = L(v_1 - v_2) \implies v_1 - v_2 \in \text{Kern}\, L \implies v_1 - v_2 = 0_V$
  $\implies$ L injektiv

(ii) Linearität derUmkehrabbildung:

$$\begin{aligned} L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) &= L^{-1}(L(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2)) \\ L^{-1}(sL(v_1)) &= L^{-1}(L(sv_1)) \\ &= sv_1 = sL^{-1}(L(v_1)) \end{aligned}$$

Beispiel

Konstruktion der zu

$$L: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto y = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

inversen Abbildung

(i) Überprüfung der Injektivität:
zu zeigen: Kern $L = (0,0)^t$, d.h. $y = Lx = (0,0,0)^t \implies x = (0,0)^t$
sukzessives Betrachten der Gleichungen

$$0 = y_1 = 2x_1 + x_2, \quad 0 = y_2 = x_1 - x_2, \quad 0 = y_3 = x_1 - 2x_2$$

$$\implies x_2 = -2x_1,\ 0 = x_1 + 2x_1 \iff x_1 = 0,\ 0 = 0 - 2x_2 \iff x_2 = 0 \quad \checkmark$$

(ii) Inverse Abbildung:
Auflösen von $y = Lx$ nach x

$$y_1 + y_2 = 3x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = (y_1 + y_2)/3 \quad \text{und} \quad y_2 - y_3 = x_2 \quad \rightsquigarrow$$

$$L^{-1} : \, y \mapsto x = \begin{pmatrix} (y_1 + y_2)/3 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix}$$

(iii) Eindeutigkeit von L^{-1}:
anderes Auflösen der Gleichungen $y = Lx \quad \rightsquigarrow$

$$\tilde{L}^{-1} y = \begin{pmatrix} 2y_2 - y_3 \\ (y_1 - 2y_2)/3 \end{pmatrix}$$

kein Widerspruch, denn $L^{-1}y = \tilde{L}^{-1}y$ für $y \in \operatorname{Bild} L$, dem Definitionsbereich der inversen Abbildung
Überprüfung der Übereinstimmung für die kanonische Basis von Bild L, $\{(L(1,0)^{\mathrm{t}}, (L(0,1)^{\mathrm{t}}\} = \{(2,1,1)^{\mathrm{t}}, (1,-1,-2)^{\mathrm{t}}\}$

$$L^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+1)/3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \\ (2 - 2 \cdot 1)/3 \end{pmatrix} = \tilde{L}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$