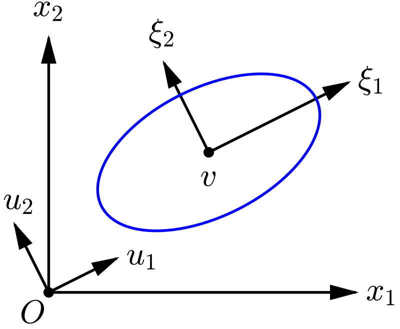
Hauptachsentransformation

Durch eine Drehung U und Verschiebung v, $\xi \mapsto x = U\xi + v$, kann eine Quadrik Q im $\mathbb{R}^n$ auf Diagonalform transformiert werden:

$$Q: \; x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_k^2 + 2\tilde{b}^{\mathrm{t}}\xi + \gamma = 0$$

mit m dem Rang der symmetrischen $n \times n$-Matrix A. Dabei ist $\tilde{b}^{\mathrm{t}} = (0, \ldots, 0)$ für $m = n$ (kein Eigenwert 0) und $2\tilde{b}^{\mathrm{t}}\xi = 2\beta\xi_{m+1}$, $\beta\gamma = 0$ für $m < n$.



Die Spalten der Drehmatrix U enthalten normierte Eigenvektoren u_k zu den Eigenwerten λ_k von A, und die Geraden $g_k : x = v + tu_k$ werden als Hauptachsen bezeichnet. Der Verschiebungsvektor v ist der Mittelpunkt der Quadrik.

Durch Skalierung erhält man eine der Normalformen

$$Q : \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{\xi_k^2}{a_k^2} = 1 \qquad (m \leq n)$$

oder

$$Q : \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{\xi_k^2}{a_k^2} = 2\xi_{m+1} \qquad (m < n)$$

je nachdem, ob A maximalen Rang hat und β oder γ Null ist. Dabei ist $\sigma_k \in \{-1, 1\}$ und $a_k > 0$ sind die Hauptachsenlängen.

Beweis

Bestimmung von U und v durch sukzessive Variablentransformationen

(i) Drehung:

$A^{\mathrm{t}} = A \quad \Longrightarrow$

$\exists$ orthonormale Basis aus Eigenvektoren u_k mit $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$

Substitution $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y \quad \rightsquigarrow \quad$ Diagonalform

$$\begin{aligned} 0 &= y^{\mathrm{t}} \underbrace{U^{\mathrm{t}} A U}_{\text{diagonal}} y + 2b^{\mathrm{t}} U y + c \\ &= y^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) y + 2(\underbrace{U^{\mathrm{t}} b}_{\tilde{b}})^{\mathrm{t}} y + c \end{aligned}$$

Ist $m + 1 < n$ (Eigenwert 0 mit Vielfachheit > 1, seltener Fall), so ist die Basis $\{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ für den Eigenraum V_0 so gewählt, dass $\tilde{b}_k = 0$ für $k > m + 1$.

Wähle dazu für eine gegebene Basis $\{\tilde{u}_{m+1}, \ldots, \tilde{u}_n\}$ von V_0 eine $(n-m) \times (n-m)$-Drehmatrix $\tilde{U}$, so dass

$$\underbrace{\tilde{U} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{m+1}^{\mathrm{t}} \\ \tilde{u}_{m+2}^{\mathrm{t}} \\ \vdots \\ \tilde{u}_n^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} b_{m+1} \\ b_{m+2} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Zeilen $u_{m+1}^{\mathrm{t}}, \ldots, u_n^{\mathrm{t}}$ von W bilden dann die gewünschte Basis.

(ii) Verschiebung:

Quadratische Ergänzung für $k \leq m$ $(\lambda_k \neq 0)$:

$$y_k = \xi_k - \tilde{b}_k / \lambda_k$$

$$\implies \quad \lambda_k y_k^2 = \lambda_k \xi_k^2 - 2\xi_k \tilde{b}_k + \tilde{b}_k^2/\lambda_k,\ 2\tilde{b}_k y_k = 2\tilde{b}_k \xi_k - 2\tilde{b}_k^2/\lambda_k$$

Summation für $k = 1, \ldots, m \quad \rightsquigarrow \quad$ Elimination der linearen Terme und Änderung der Konstante

$$c \to -\gamma = c - \sum_{k=1}^{m} \tilde{b}_k^2 / \lambda_k$$

- $m = n$ (Rang $A = n$, kein Eigenwert 0):

$$Q : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 = \gamma$$

$$x = U \underbrace{\left(\xi - (\tilde{b}_1/\lambda_1, \ldots, \tilde{b}_n/\lambda_n)^{\mathrm{t}}\right)}_{y} \quad \rightsquigarrow \quad v = -U(\tilde{b}_1/\lambda_1, \ldots, \tilde{b}_n/\lambda_n)^{\mathrm{t}})$$

- $m < n$ (Eigenwert 0 mit Vielfachheit $n - m$):

$$Q: \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_k^2 + 2\tilde{b}_{m+1} y_{m+1} = \gamma$$

Falls $\tilde{b}_{m+1} = 0$, keine weitere Verschiebung, d.h. $\xi_k = y_k$, $k = m+1, \ldots, n$, und $v = -U(\tilde{b}_1/\lambda_1, \ldots, \tilde{b}_m/\lambda_m, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}})$
Falls $\tilde{b}_{m+1} \neq 0$, so wird γ durch Setzen von $y_{m+1} = \xi_{m+1} + \gamma/(2\tilde{b}_{m+1})$ eliminiert:

$$Q: \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_k^2 + 2\beta\xi_{m+1} = 0, \quad \beta = \tilde{b}_{m+1}\,.$$

$$\rightsquigarrow \quad v = -U(\tilde{b}_1/\lambda_1, \ldots, \tilde{b}_m/\lambda_m, -2\gamma/\tilde{b}_{m+1}, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}})$$

(iii) Skalierung:
Division durch γ oder $-\beta \quad \rightsquigarrow \quad$ Normalformen

$$Q: \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{\xi_k^2}{a_k^2} = \gamma, \quad \sigma_k / a_k^2 = \lambda_k / \gamma \qquad (m \leq n)\,,$$

oder

$$Q: \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \frac{\xi_k^2}{a_k^2} = 2\xi_{m+1}, \quad \sigma_k / a_k^2 = -\lambda_k / \beta \qquad (m < n)\,.$$

Beispiel

Normalform der Quadrik

$$Q: \; 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3 + 2x_2 = 0$$

(i) Matrixschreibweise:

$$Q: \; x^{\mathrm{t}} A x + 2b^{\mathrm{t}} x + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 0$$

beachte: $a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,1}x_2x_1 = 6x_1x_2 \quad \Longrightarrow \quad a_{1,2} = a_{2,1} = 3$, etc.

(i) Eigenwerte von A:
charakteristisches Polynom

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3-16(5-\lambda)-9(5-\lambda) = (5-\lambda)((5-\lambda)^2-25$$

$\rightsquigarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$

(iii) Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-10 & 3 & 0 \\ 3 & 5-10 & 4 \\ 0 & 4 & 5-10 \end{pmatrix} u_1 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

analog

$$u_2 \parallel (4,0,-3)^{\mathrm{t}}, \quad u_3 \parallel (3,-5,4)^{\mathrm{t}}$$

Determinante der Matrix aus normierten Eigenvektoren

$$\begin{vmatrix} 3/\sqrt{50} & 4/5 & 3/\sqrt{50} \\ 5/\sqrt{50} & 0 & -5/\sqrt{50} \\ 4/\sqrt{50} & -3/5 & 4/\sqrt{50} \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\frac{80}{250} - \frac{45}{250} - \frac{45}{250} - \frac{80}{250} = -1$$

Multiplikation eines Eigenvektors (z.B. u_2) mit -1 $\rightsquigarrow$ Drehmatrix (Determinante $= 1$)

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & -4 & 3/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} & 0 & -5/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & 3 & 4/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iv) Diagonalisierung:

$x = Uy$ $\rightsquigarrow$

$$Q:\ y^{\mathrm{t}}U^{\mathrm{t}}AUy + 2b^{\mathrm{t}}Uy = 0$$

mit

$$U^{\mathrm{t}}AU = \operatorname{diag}(10,5,0), \quad b^{\mathrm{t}}U = (0,1,0)U = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}),$$

d.h.

$$Q:\ 10y_1^2 + 5y_2^2 + \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}y_3 = 0$$

(v) Verschiebung, quadratische Terme:
$10y_1^2 + \sqrt{2}y_1 = 10(\underbrace{y_1 + \sqrt{2}/20}_{\xi_1})^2 - \underbrace{10(\sqrt{2}/20)^2}_{1/20},\ y_2 = \xi_2 \quad \rightsquigarrow$

$$Q:\ 10\xi_1^2 + 5\xi_2^2 - \sqrt{2}y_3 - 1/20 = 0$$

(vi) Verschiebung, linearer Term:
$-\sqrt{2}y_3 - 1/20 = -\sqrt{2}(\underbrace{y_3 + 1/(20\sqrt{2})}_{\xi_3}) \quad \rightsquigarrow$

$$Q:\ 10\xi_1^2 + 5\xi_2^2 0 - \sqrt{2}\xi_3 = 0$$

(vii) Skalierung:
Multiplikation mit $\sqrt{2}$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ Normalform

$$10\sqrt{2}\xi_1^2 + 5\sqrt{2}\xi_2^2 = 2\xi_3$$

mit den Halbachsenlängen $a_1 = 1/\sqrt{10\sqrt{2}}$, $a_2 = 1/\sqrt{5\sqrt{2}}$

(viii) Transformation:
$x = Uy = U(\xi - (\sqrt{2}/20, 0, 1/(20\sqrt{2}))^{\mathrm{t}})$ mit dem Verschiebungsvektor

$$\begin{aligned} v &= \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & -4 & 3/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} & 0 & -5/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & 3 & 4/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/20 \\ 0 \\ -1/(20\sqrt{2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -3 - 3/2 \\ -5 + 5/2 \\ -4 - 4/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{200}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$