Rückwärtseinsetzen

Bei einem linearen Gleichungssystem in oberer Dreiecksform,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

mit $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ können die Unbekannten $x_n, \ldots, x_1$ nacheinander bestimmt werden:

$$r_{n,n} x_n = b_n \implies x_n = b_n / r_{n,n}$$

und, für $\ell = n-1, \ldots 1$,

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell \implies x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n\right) / r_{\ell,\ell}\,.$$

Dabei werden jeweils die schon berechneten Werte $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ verwendet.

Bei einem linearen Gleichungssystem mit einer unteren Dreiecksmatrix kann man analog nacheinander $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen.

Die Berechnungen können mit Hilfe eines Tableaus $R|b$ erfolgen, in dem die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite zusammengefasst sind. Für $\ell = n, \ldots, 1$ dividiert man die Zeile ℓ durch $r_{\ell,\ell}$ ($\rightsquigarrow$ Diagonalelement gleich 1) und zieht für $k = \ell - 1, \ldots, 1$ das $r_{k,\ell}$-fache der ℓ-ten Zeile von der k-ten Zeile ab. Dadurch werden oberhalb von $r_{\ell,\ell} = 1$ Nullen erzeugt. Als Resultat enthält das Tableau die Einheitsmatrix und in der letzten Spalte (modifizierte rechte Seite b) die Lösung x.

Bei der praktischen Durchführung werden nur die sich ändernden Zeilen untereinander notiert.

Beispiel

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} x_3 &= 7/7 = 1 \\ x_2 &= (0 - 2x_3)/2 = (0 - 2 \cdot 1)/2 = -1 \\ x_1 &= (6 - 3x_2 - x_3)/4 = (6 - 3(-1) - 1)/4 = 2 \end{aligned}$$

alternative Lösung mit Hilfe des Tableaus $R|b$

$$
\begin{array}{ccc|c||l}
4 & 3 & 1 & 6 & Z1 \\
0 & 2 & 2 & 0 & Z2 \\
0 & 0 & 7 & 7 & Z3 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & Z3' = Z3/2 \\
4 & 3 & 0 & 5 & Z1' = Z1 - Z3' \\
0 & 2 & 0 & -2 & Z2' = Z2 - 2 * Z3' \\
\hline
0 & \boxed{1} & 0 & -1 & Z2'' = Z2'/2 \\
4 & 0 & 0 & 8 & Z1'' = Z1' - 3 * Z2'' \\
\hline
\boxed{1} & 0 & 0 & 2 & Z1''' = Z1''/4
\end{array}
$$

markierte Zeilen $Z1'''$, $Z2''$, $Z3'$ (Diagonalelement gleich 1) $\rightsquigarrow$ Lösung

$$x_3 = 1,\ x_2 = -1,\ x_1 = 2$$

Gauß-Elimination

Durch Gauß-Transformationen lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit invertierbarer $n \times n$-Koeffizientenmatrix A in maximal $n-1$ Schritten auf obere Dreiecksform bringen.
Dazu werden sukzessive die Koeffizienten unterhalb der Diagonalen annulliert, d.h. nach $\ell - 1$ Schritten hat das lineare Gleichungssystem die Form

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & a_{\ell,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n}x_n & = & b_\ell \\
 & & & & & & a_{\ell+1,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n}x_n & = & b_{\ell+1} \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & a_{n,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Im einzelnen verläuft der ℓ-te Eliminationsschritt wie folgt.

- Aus den Koeffizienten $a_{\ell,\ell}, \ldots, a_{n,\ell}$ wird ein von Null verschiedener Koeffizient $a_{i,\ell}$, das sogenannte Pivot-Element, ausgewählt, und die ℓ-te mit der i-ten Gleichung vertauscht.
- Für $j > \ell$ wird die j-te Gleichung durch eine Linearkombination der j-ten und ℓ-ten Gleichung ersetzt, um den Term mit der Unbekannten x_ℓ zu eliminieren ($a_{j,\ell} \to 0$):

$$a_{j,k} \leftarrow \alpha_j a_{j,k} + \beta_j a_{\ell,k},\ k = \ell, \ldots, n, \quad b_j \leftarrow \alpha_j b_j + \beta_j b_\ell$$

  Dabei sind α_j und β_j so gewählt, dass $\alpha_j a_{j,\ell} + \beta_j a_{\ell,\ell} = 0$ ($\rightarrow a_{j,k} = 0$ für $k = \ell$, Nullen unterhalb des Pivot-Elements $a_{\ell,\ell}$)

Eine kanonische Wahl bei den Eliminationsschritten ist $\alpha_j = 1$, $\beta_j = -a_{j,\ell}/a_{\ell,\ell}$; jedoch kann, um gegebenenfalls Brüche zu vermeiden, auch eine andere Wahl getroffen werden, z.B. $\alpha_j = a_{\ell,\ell}$, $\beta_j = -a_{j,\ell}$.

Üblicherweise werden für die Eliminationsschritte die Matrix A und die rechte Seite b zu einem Tableau $A|b$ zusammengefasst. Die modifizierten Zeilen werden dann untereinander aufgelistet und die Pivot-Elemente markiert. Zur besseren Erläuterung können die Faktoren α_j und β_j in einer zusätzlichen Spalte notiert werden. Die resultierende Dreiecksform besteht dann aus den markierten Pivot-Zeilen.

Das Schema kann zur simultanen Behandlung mehrerer rechter Seiten benutzt werden. Insbesondere kann so mit $b = (e_1, \ldots, e_n)$ die Inverse der Matrix A bestimmt werden.

Beispiel

Gauß-Elimination für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 7 \end{array}$$

Matrix und rechte Seite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ablauf des Gauß-Algorithmus mit Hilfe des Tableaus $A|b$ (erste vier Zeilen des folgenden Schemas)

A				b	α, β		
0	2	1	−1	−1	1		
$\boxed{\mathbf{3}}$	**2**	**0**	**1**	**5**	0	−1	−2
3	1	−2	1	3		1	
6	4	−1	1	7			1
0	2	1	−1	−1	1		
0	$\boxed{\mathbf{-1}}$	**−2**	**0**	**−2**	2	0	
0	0	−1	−1	−3		1	
0	0	−3	−1	−5	1		
0	0	$\boxed{\mathbf{-1}}$	**−1**	**−3**	−3		
0	0	0	$\boxed{\mathbf{2}}$	**4**			

Schritt 1:

Wahl des Pivot-Elements $\boxed{3}$ in Spalte 1

$\rightarrow$ Zeile 1 der Dreiecksform

Modifikation der (nicht-pivot) Zeilen 1,3,4, z.B.

Zeile 4 $\leftarrow$ 1 * Zeile 4 $+$ (-2) * Zeile 2

(Koeffizienten $\alpha = 1$, $\beta = -2$, notiert im rechten Block des Schemas)

drei modifizierte Zeilen $\rightarrow$ nächstes Tableau

Schritt 2:

Wahl des Pivot-Elements $\boxed{\text{-1}}$

$\rightarrow$ Zeile 2 der Dreiecksform

Modifikation der (nicht-pivot) Zeilen, z.B.

Zeile 1 $\leftarrow$ 1 * Zeile 1 $+$ 2 * Zeile 2

(Koeffizienten notiert im rechten Block des Schemas)

zwei modifizierte Zeilen $\rightarrow$ nächstes Tableau

Schritt 3:

Pivot-Element -1, nur eine Zeile zu modifizieren, Linearkombination mit der Pivot-Zeile mit den Koeffizienten 1 und -3

Die vier Pivot-Zeilen bilden die Matrix und rechte Seite der resultierenden Dreiecksform $Rx = b$.

Rückwärtseinsetzen beginnend mit dem Tableau $R|b$ (erste vier Zeilen)

$$
\begin{array}{cccc|l}
3 & 2 & 0 & 1 & 5 \\
0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 = x_4 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 = x_3 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 = x_2 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 = x_1
\end{array}
$$

Bei jeder der vier Tableau-Modifikationen wird zunächst die jeweils letzte Zeile durch das Diagonalelement (Pivot-Element bei dem entsprechenden Gauß-Eliminations-Schritt) dividiert ($\rightarrow$ eingerahmte 1). Die resultierende Zeile enthält als letzten Eintrag eine Komponente der Lösung und wird nun von den anderen Zeilen abgezogen, z.B.

$$(3\,2\,0\,1|5) - (0\,0\,0\,\boxed{1}\,|2) = (3\,2\,0\,0|3)\,.$$