Euklidische Normalformen der zweidimensionalen Quadriken

Es existieren 6 (nicht-triviale) Typen ebener Quadriken mit den folgenden Normalformen:

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 2x_2$	Parabel

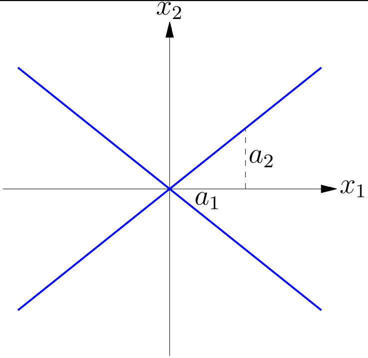
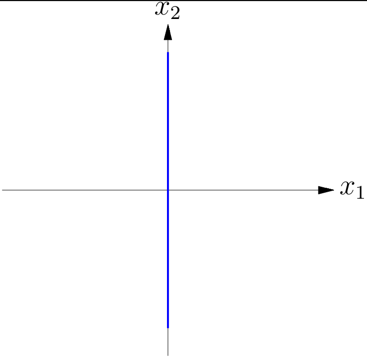
- Mittelpunktsquadriken

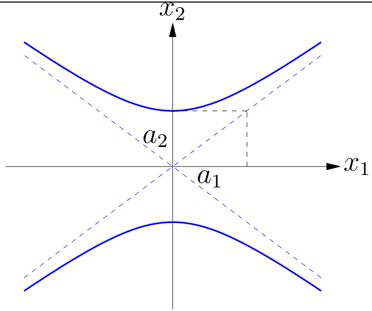
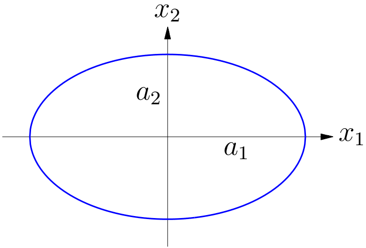
Normalform	Bezeichnung
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$	Hyperbel
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$	Ellipse
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$	paralleles Geradenpaar

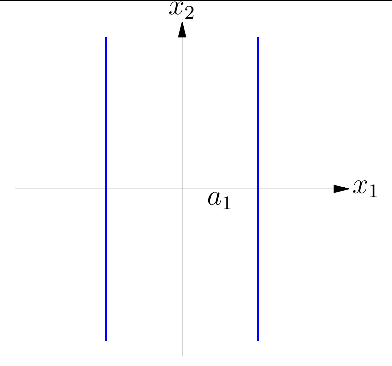
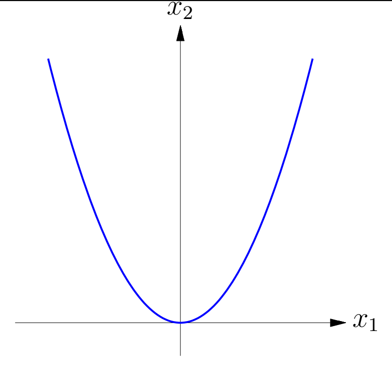
Die Größen $a_k > 0$ sind die Hauptachsenlängen der Quadrik.

Triviale Sonderfälle sind die Normalformen

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (Punkt)
- $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (leere Menge)
- $-\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ (leere Menge)

schneidendes Geradenpaar	Doppelgerade
	

Hyperbel	Ellipse
	

paralleles Geradenpaar	Parabel
	

Beispiel

Normalform und der Typ der Quadrik

$$Q:\ 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 14\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 - 18 = 0$$

(i) Matrixform:

$$0 = x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = x^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}\,(-7,-1)\,x - 18$$

(ii) Eigenwerte:
charakteristisches Polynom

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 25$$

Nullstellen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$

(iii) Eigenvektoren:
homogenes lineares Gleichungssystem

$$\det(A-(-2)E)u_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} u_1 = 0$$

$\rightsquigarrow$ normierter Eigenvektor $u_1 = (1,-1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{2}$ zu $\lambda_1 = -2$
normierter Eigenvektor u_2 zu $\lambda_2 = 8 \perp$ zu $u_1 \quad \Longrightarrow \; u_2 = (1,1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{2}$,
wobei das Vorzeichen so gewählt ist, dass die Determinante der Transformationsmatrix

$$U = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv ist (Drehmatrix)

(iv) Diagonalisierung:
Substitution $x = Uy \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= x^{\mathrm{t}} A x + 2 b^{\mathrm{t}} x + c \\ &= y^{\mathrm{t}} U^{\mathrm{t}} A U y + 2 \left(b^{\mathrm{t}} U \right) y + c \\ &= -2 y_1^2 + 8 y_2^2 - 12 y_1 - 16 y_2 - 18 \end{aligned}$$

(v) Verschiebung:
quadratische Ergänzung $\xi = y + (3, -1)^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= -2 y_1^2 + 8 y_2^2 - 12 y_1 - 16 y_2 - 18 \\ &= -2 (y_1 + 3)^2 + 18 + 8 (y_2 - 1)^2 - 8 - 18 \\ &= -2 \xi_1^2 + 8 \xi_2^2 - 8 \end{aligned}$$

(vi) Skalierung:
Division durch 8 $\quad \rightsquigarrow \quad$ Normalform

$$-\frac{\xi_1^2}{2^2} + \frac{\xi_2^2}{1^2} = 1$$

Hyperbel mit Halbachsenlängen 2 und 1

(vii) Transformation:
$x = Uy = U(\xi + (-3, 1)^{\mathrm{t}}) \quad \rightsquigarrow \quad$ Verschiebungsvektor (Mittelpunkt)

$$v = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(viii) Skizze: