Euklidische Normalformen der dreidimensionalen Quadriken

Es existieren 10 (nicht-triviale) Typen räumlicher Quadriken mit den folgenden Normalformen:

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	(Doppel-)Kegel
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Schneidende Ebenen

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$	elliptisches Paraboloid
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 2x_2$	parabolischer Zylinder

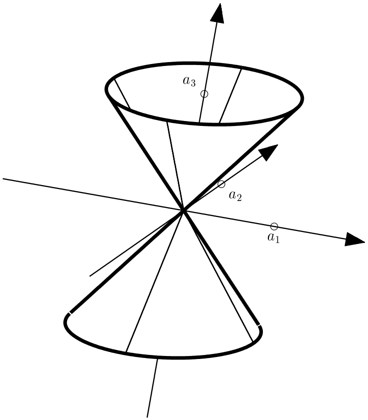
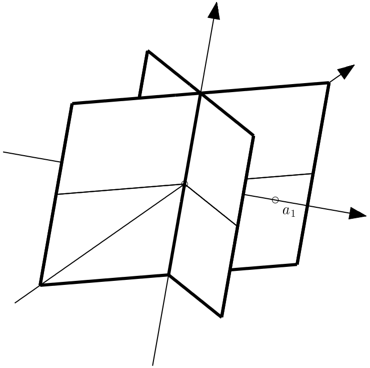
- Mittelpunktsquadriken

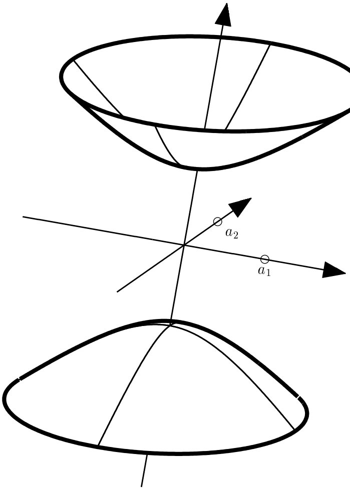
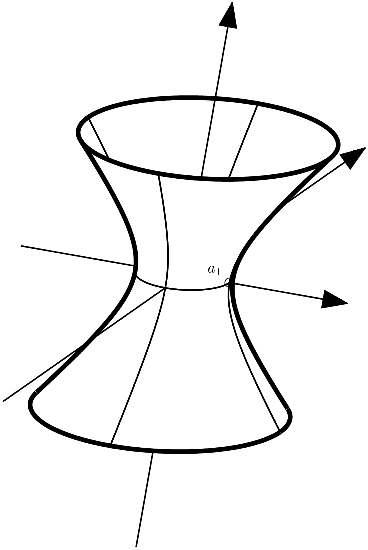
Normalform	Bezeichnung
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$	zweischaliges Hyperboloid
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$	einschaliges Hyperboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$	Ellipsoid
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$	hyperbolischer Zylinder
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$	elliptischer Zylinder

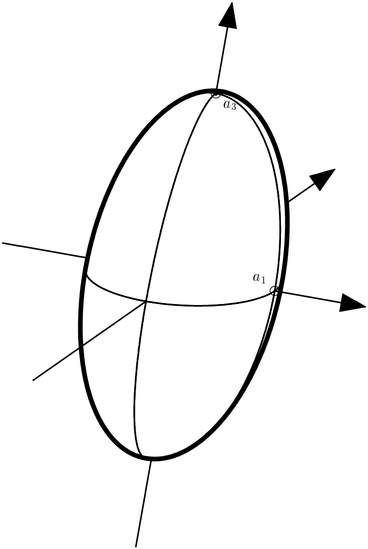
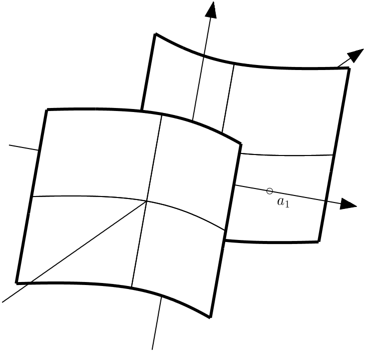
Die Größen a_k sind die Hauptachsenlängen der Quadrik.

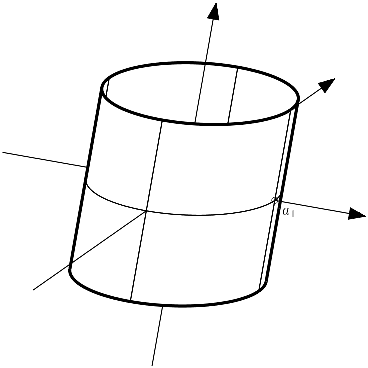
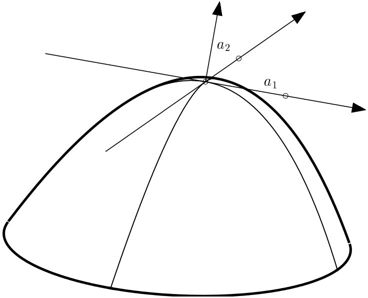
Triviale Sonderfälle sind die Normalformen

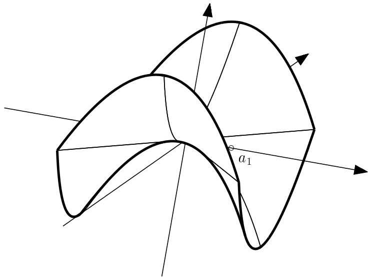
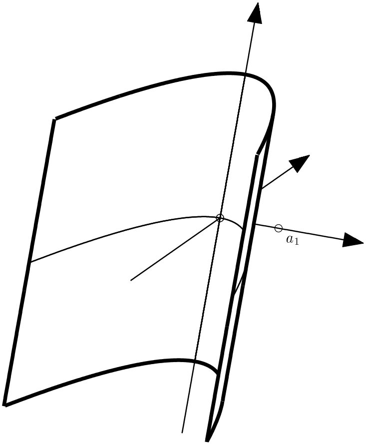
- $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,\ -\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,\ -\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ (leere Mengen)
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0,\ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (Punkt und Gerade)
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0,\ \frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ (Doppelebene und parallele Ebenen)

(Doppel-)Kegel	schneidende Ebenen
	

zweischaliges Hyperboloid	einschaliges Hyperboloid
	

Ellipsoid	hyperbolischer Zylinder
	

elliptischer Zylinder	elliptisches Paraboloid
	

hyperbolisches Paraboloid	parabolischer Zylinder
	

Beispiel

Normalform und der Typ der Quadrik

$$Q:\ x^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

(i) Eigenwerte:
charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} &\underset{\text{Sarrus}}{=} (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)-16(5-\lambda)-16(1-\lambda) \\ &= \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81 \end{aligned}$$

Nullstellen $\rightsquigarrow$ Eigenwerte

$$\lambda_1 = 9,\quad \lambda_2 = 3,\quad \lambda_3 = -3$$

(ii) Eigenvektoren:
normierte Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_k

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vorzeichen so gewählt, dass ein Rechtssystem entsteht $\quad\rightsquigarrow\quad$ Drehmatrix

$$U = (u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Diagonalisierung:
Substitution $x = Uy \quad \rightsquigarrow$

$$(y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + 2\underbrace{(0, 3, 0)}_{(-2,1,2)U}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + 2 = 0$$

(iv) Verschiebung:
quadratische Ergänzung $\xi = y + (0,1,0)^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9\xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 3\xi_3^2 - 1 \end{aligned}$$

(v) Normalform:

$$-\frac{\xi_3^2}{1/3} + \frac{\xi_1^2}{1/9} + \frac{\xi_2^2}{1/3} = 1$$

Q: einschaliges Hyperboloid mit Hauptachsenlängen

$$a_3 = \sqrt{1/3}, \quad a_1 = 1/3, \quad a_2 = \sqrt{1/3}$$

Transformation $x = Uy = U(\xi - (0,1,0)^{\mathrm{t}}) \quad \rightsquigarrow \quad$ Mittelpunkt

$$v = -U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$