Entwicklung von Determinanten

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix A lässt sich nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} \det \tilde{A}_{j,k} \quad \text{(Entwicklung nach Zeile } j\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} \det \tilde{A}_{j,k} \quad \text{(Entwicklung nach Spalte } k\text{)}\,,
\end{aligned}
$$

wobei $\tilde{A}_{j,k}$ die Matrix bezeichnet, die durch Streichen der j-ten Zeile und k-ten Spalte von A entsteht,

$$
A : \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & \mathbf{a_{j,k}} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{j,k} : \begin{pmatrix} a_{1,1} & \vdots & \vdots & a_{1,n} \\ \cdots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots \\ a_{n,1} & \vdots & \vdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.
$$

Durch wiederholte Anwendung der Prozedur kann die Dimension der Determinanten sukzessive reduziert werden.

Beweis

$\det A = \det A^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow \quad$ Entwicklung nach einer Spalte

Darstellung der k-ten Spalte als Linearkombination von Einheitsvektoren,

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} e_j \,,$$

und Multilinearität der Determinante $\quad \Longrightarrow$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \det \underbrace{(a_1, \ldots, a_{k-1}, e_j, a_{k+1}, \ldots, a_n)}_{=B_j}$$

$n-k$ Spaltenvertauschungen und $n-j$ Zeilenvertauschungen

$\rightsquigarrow \quad$ 1 von e_j in rechter unterer Ecke:

$$\det B_j = \underbrace{(-1)^{n-k}(-1)^{n-j}}_{(-1)^{j+k}} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{j,k} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,k-1} & a_{j,k+1} & \cdots & a_{j,n} & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach Permutationen $\rightsquigarrow$ nichttriviale Beiträge nur von Permutationen p mit $p(n) = n$, d.h. $(p(1), \ldots, p(n-1)) \in S_{n-1}$ und

$$\det \begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ & & \tilde{A}_{j,k} & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,k-1} & a_{j,k+1} & \cdots & a_{j,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,j}$$

$\rightsquigarrow$ angegebene Entwicklungsformel

Beispiel

Entwicklung der Determinante

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile $\quad \rightsquigarrow$

$$(-1)^{2+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{2+4} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklung der ersten Determinante nach der ersten Spalte $\quad \rightsquigarrow$

$$(-1)^{1+1} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -3 + 48 = 45$$

Determinante der Dreiecksmatrix: $1 \cdot 6 \cdot 2 = 12$
insgesamt: $d = -2 \cdot 45 + 3 \cdot 12 = -54$

Beispiel

Ebene durch die Punkte

$$P_k = (x_k, y_k, z_k), \quad k = 1, 2, 3$$

Ebenengleichung in Determinantenform

$$E : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Entwicklung nach der ersten Zeile $\quad \rightsquigarrow$

$$E : \; ax + by + cz = d$$

mit

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \; b = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \; c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \; d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Vandermonde-Determinante

Die Determinante der an n Punkten x_j ausgewerteten Monome $1, x, \ldots x^{n-1}$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k} (x_j - x_k)\,.$$

Beweis

Induktion

(i) $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

(ii) $(n-1) \to n$:

Subtraktion der ersten Zeile von allen weiteren Zeilen

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Herausziehen des Faktors $x_k - x_1$ aus der k-ten Zeile

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix}$$

Subtraktion des x_1-fachen der vorhergehenden Spalte von jeder Spalte

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Induktionsvoraussetzung $\quad \Longrightarrow \quad |\cdots| = \prod_{j>k\geq 2}(x_j - x_k)$