Eigenwert und Eigenvektor

Gilt für eine quadratische Matrix

$$Av = \lambda v, \quad v \neq (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}},$$

so bezeichnet man den Skalar λ als Eigenwert von A und den Vektor v als einen Eigenvektor zu λ.

Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert bilden zusammen mit dem Nullvektor einen Unterraum, den so genannten Eigenraum

$$V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$$

von λ (E bezeichnet die Einheitsmatrix). Die mögliche Eigenvektoren v zu λ kann man somit als nichttriviale Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)v = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$$

bestimmen.

Beispiel

Eigenwerte und -Vektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Eigenwert $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\implies \quad v = (1,0,1)^{\mathrm{t}}$ ist ein Eigenvektor zu λ

$\mathrm{Rang}(A - 0E) = 2 \quad \implies \quad \dim \underbrace{\mathrm{Kern}(A - 0E)}_{V_\lambda} = 3 - 2 = 1$, d.h.

$$V_\lambda = \{sv : s \in \mathbb{R}\},$$

alle Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ sind parallel zu v

(ii) Eigenwert $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\implies \quad (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ ist ein Eigenvektor zu λ

Bestimmung aller Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A - 2E)v = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad v = \begin{pmatrix} s \\ (s+t)/2 \\ t \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$, d.h. der Eigenraum V_λ ist zweidimensional mit einer möglichen Basis $\{u, w\}$

Beispiel

Mögliche Fälle des Eigenwertproblems für reelle (2×2)-Matrizen

- Zwei reelle Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1,\ v \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda} = 3,\ \tilde{v} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ein reeller Eigenwert, zwei linear unabhängige Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2,\ v \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{v} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_\lambda = \mathbb{R}^2$$

- Ein reeller Eigenwert, ein bis auf Vielfache eindeutiger Eigenvektor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1,\ v \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zwei konjugiert komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_\pm = 1 \pm \mathrm{i}\,, v_{1,2} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \mathrm{i} \end{pmatrix}$$