Dreiecksform

Jede $n \times n$-Matrix A lässt sich durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation U auf obere Dreiecksform bringen:

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = U^* A U, \quad U^* = \bar{U}^{\mathrm{t}} = U^{-1}\,.$$

Die Diagonale von R enthält die Eigenwerte λ_k von A und die Spalten von U bilden eine orthonormale Basis.

Beweis

Induktion über die Dimension n:

- $n = 1$: 1×1-Matrix $\checkmark$
- $n - 1 \to n$:
  Eine $n \times n$-Matrix A hat (mindestens) einen Eigenvektor v.
  Normierung und orthogonale Ergänzung $\rightsquigarrow$ orthonormale Basis $\{v, w_1, \dots, w_{n-1}\}$
  Ähnlichkeitstransformation mit $V = (v, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \;&=\; V^*AV = \begin{pmatrix} v^* \\ w_1^* \\ \vdots \\ w_{n-1}^* \end{pmatrix} \left(\; \lambda v \;\middle|\; Aw_1, \dots, Aw_{n-1} \;\right) \\
&=\; \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ \underline{0} & B \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da $w_k^* v = 0$ und mit $\bar{x}_k = Aw_k$, $\underline{0} = (0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$

Induktionsvoraussetzung $\implies$
$\exists$ unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Dreiecksform für die $n-1 \times n-1$-Matrix B:

$$\tilde{U}^* B \tilde{U} = R_{n-1}$$

Mit

$$U = V \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^* \\ \underline{0} & \tilde{U} \end{pmatrix}, \quad \underline{0} = (0, \dots, 0)^{\mathrm{t}},\, \underline{0}^* = \underline{0}^{\mathrm{t}}$$

folgt

$$\begin{aligned} U^* A U &= \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^* \\ \underline{0} & \tilde{U}^* \end{pmatrix} V^* A V \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^* \\ \underline{0} & \tilde{U} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^* \\ \underline{0} & \tilde{U}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ \underline{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^* \\ \underline{0} & \tilde{U} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^* \\ \underline{0} & \tilde{U}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{U} \\ \underline{0} & B \tilde{U} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{U} \\ \underline{0} & \tilde{U}^* B \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{U} \\ \underline{0} & R_{n-1} \end{pmatrix} = R \end{aligned}$$

Beispiel

Unitäre Ähnlichkeitstransformation der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

auf Dreiecksform

charakteristisches Polynom

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2$$

doppelte Nullstelle $\lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1$ ist einziger Eigenwert

Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - \lambda E)v = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normierung und Ergänzung zu einer orthonormalen Basis $\{v, w\}$ $\rightsquigarrow$ unitäre Transformationsmatrix

$$U = (v, w) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$U^* = U^{\mathrm{t}}$ für die reelle Matrix U $\rightsquigarrow$ Dreiecksform

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} A U &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \end{aligned}$$