Drehung

Die orthogonale $n \times n$-Matrix

$$Q\colon \quad \begin{array}{r} \\ \\ \text{Zeile } j \quad \rightarrow \\ \\ \text{Zeile } k \quad \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & & -\sin\varphi & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \sin\varphi & & \cos\varphi & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um den Winkel φ in der $x_j x_k$-Ebene des $\mathbb{R}^n$.

Jede orthogonale Matrix Q mit $\det Q = 1$ ist als Produkt solcher Drehungen in Koordinatenebenen darstellbar:

$$Q = \prod_{j<k} Q_{j,k}\,.$$

Beweis

(i) Orthogonalität:

$c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi, \quad c^2 + s^2 = 1 \quad \Longrightarrow$

$$QQ^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & \\ & & & \ddots & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\rightsquigarrow$ Orthogonalität der Drehmatrix Q

(ii) Herleitung der Faktorisierung für $n = 3$:
Bestimmung der Drehungen durch sukzessives Annulieren der Elemente $q_{2,1}, q_{3,1}, q_{3,2}$ von Q:

$$
\begin{aligned}
Q_{1,2}^{-1} Q &= \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \\
Q_{1,3}^{-1} Q_{1,2}^{-1} Q &= \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix} \\
Q_{2,3}^{-1} Q_{1,3}^{-1} Q_{1,2}^{-1} Q &= \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R
\end{aligned}
$$

Die Drehungen $Q_{2,3}$, $Q_{1,3}$, $Q_{1,2}$ bilden jeweils Vektoren $(v_1, v_2)^{\mathrm{t}}$ auf Vielfache von Einheitsvektoren ab.
$\det Q_{j,k} = 1$, $\det Q = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det R = 1 \quad \Longrightarrow \quad r_{3,3} = 1$
Normierung der Spalten $\quad \Longrightarrow \quad R = E$ und $Q = Q_{1,2} Q_{1,3} Q_{2,3}$

Beispiel

Faktorisierung der Drehmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Drehung $D_z^{-1} = Q_{1,2}^{-1}$ um $\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse:

$$D_z^{-1} Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Drehung $D_y^{-1} = Q_{1,3}^{-1}$ um $\frac{\pi}{4}$ um die y-Achse:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_{D_y^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}}_{D_z^{-1}Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Drehung $D_x^{-1} = Q_{2,3}$ um $-\frac{\pi}{3}$ um die x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} D_y^{-1} D_z^{-1} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$D_x^{-1} D_y^{-1} D_z^{-1} Q = E$, $D^{-1} = D^{\mathrm{t}}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Faktorisierung

$$\begin{aligned} Q &= (D_x^{-1} D_y^{-1} D_z^{-1})^{-1} = D_z D_y D_x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Drehung im Raum

Eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ mit normierter Drehachsenrichtung u und Drehwinkel φ, orientiert wie eine Rechtsschraube, bildet einen Vektor x auf

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)uu^{\mathrm{t}}x + \sin\varphi\, u \times x$$

ab, wobei $u \times x$ das Kreuzprodukt von u und x bezeichnet.
Die entsprechende Drehmatrix ist

$$Q: \quad q_{j,\ell} \;=\; \cos\varphi\,\delta_{j,\ell} + (1-\cos\varphi)\,u_j u_\ell + \sin\varphi \sum_{\ell} \varepsilon_{j,k,\ell} u_k$$

mit dem Kroneckersymbol $\delta_{j,\ell}$ und dem ε-Tensor $\varepsilon_{j,k,\ell}$ bzw.

$$Q = \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\varphi) \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis

zeige:

$Qu = u$ und Q dreht einen zu u orthogonalen Vektor v um einen Winkel φ um die Achse u.

(i) Bild von u:

$$Qu \;=\; \cos\varphi\, u \;+\; (1-\cos\varphi)u\,\underbrace{u^{\mathrm{t}}u}_{=1} + \sin\varphi\;\underbrace{u\times u}_{=(0,0,0)^{\mathrm{t}}} \;=\; u$$

(ii) Bild von v:

$$Qv = \cos\varphi\, v \;+\; (0,0,0)^{\mathrm{t}} \;+\; \sin\varphi\;\underbrace{u\times v}_{=w}, \quad w \perp v,\ |w| = 1$$

$\iff$ Drehung um φ in der von v und $u \times v$ aufgespannten Ebene

Beispiel

Matrix Q einer Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{3}$ um die Achse $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^{\mathrm{t}}$

$\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\cos\varphi\ \delta_{j,\ell} \quad : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1-\cos\varphi)u_j u_\ell \quad : \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi \sum_k \varepsilon_{j,k,\ell} u_k \quad : \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{1,3,2}u_3 & \varepsilon_{1,2,3}u_2 \\ \varepsilon_{2,3,1}u_3 & 0 & \varepsilon_{2,1,3}u_1 \\ \varepsilon_{3,2,1}u_2 & \varepsilon_{3,1,2}u_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Summe der drei Matrizen $\quad \rightsquigarrow$

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$