Drehachse und Drehwinkel

Jede Drehung Q im $\mathbb{R}^3$ besitzt eine Drehachse, d.h. lässt einen Einheitsvektor u invariant, und entspricht einer ebenen Drehung um einen Winkel φ in der zu u orthogonalen Ebene.

Bezüglich eines orthonormalen Rechtssystems u, v, w besitzt Q die Matrixdarstellung

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für den Drehwinkel

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur} Q - 1).$$

Beweis

Orthogonalität der Drehmatrix $Q \quad \Longrightarrow$

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}, \quad |\det Q| = 1$$

$|\lambda_k| = 1$ und $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists$ Eigenwert $\lambda = 1$,
denn bei geeigneter Numerierung gilt

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2 = 1$$

oder

$$\lambda_k \in \{-1, 1\}$$

Drehachse u: normierter Eigenvektor u zum Eigenwert 1 orthonormales Rechtssystem $u, v, w \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} Qu &= u \\ Qv &= \alpha v + \beta w \\ Qw &= \gamma v + \delta w \end{aligned}$$

Qv, Qw haben keine u-Komponente, wegen der Winkeltreue orthogonaler Matrizen:

$$x \perp u \quad \Longrightarrow \quad Qx \perp Qu = u$$

Matrixform obiger Gleichungen

$$Q(\underbrace{u, v, w}_{P}) = (u, v, w) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}}_{\tilde{Q}}$$

$\tilde{Q} = P^{-1}QP$ orthogonal mit $\det \tilde{Q} = \det Q = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Invarianz der Spur unter Ähnlichkeitstransformationen $\quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{Spur} Q = \operatorname{Spur} \tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

Beispiel

Bestimmung von Drehachse und Drehwinkel für die Drehmatrix

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Überprüfung der Orthogonalität und der Determinante:

$$Q^{\mathrm{t}} Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \quad \Longleftrightarrow \quad Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$$

und

$$\det Q = \frac{1}{8} \det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1$$

(ii) Drehachse:
Eigenvektor u zum Eigenwert $\lambda = 1$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

(iii) Drehwinkel:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur} Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$\Longrightarrow \quad \varphi = \pm\pi/2$

(iv) Orientierung:
Das Vorzeichen von φ hängt von der Orientierung der Drehachsenrichtung u ab und kann mit Hilfe eines Rechtssystems $\{u, v, w\}$ bestimmt werden:

$$w^{\mathrm{t}} Q v = w^{\mathrm{t}}(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi$$

wähle als Rechtssystem

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad u \perp v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = u \times v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Bilden des Produktes $w^{\mathrm{t}} Q v \quad \rightsquigarrow$

$$\sin\varphi = (-\sqrt{2}/2,\ 0,\ \sqrt{2}/2) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{Qv} = 1\,,$$

d.h. $\varphi = \pi/2$