Diagonalisierung zyklischer Matrizen

Eine zyklische $n \times n$-Matrix A kann mit Hilfe der Fourier-Matrix

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)\,,$$

diagonalisiert werden:

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

d.h. die Spalten von W, $(1, w^k, w^{2k}, \ldots, w^{(n-1)k})^{\mathrm{t}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, sind die Eigenvektoren von A. Die Eigenwerte $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ lassen sich auch unmittelbar aus dem erzeugenden Vektor der zyklischen Matrix berechnen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \overline{W}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell},\ \ell = 0, \ldots, n-1\,.$$

Beweis

$A: \ (a_{j-k \bmod n})_{j,k=0,\dots,n-1}$
j-te Komponente des Vektors $A\, v_\ell$, $v_\ell = (w^{0\ell}, \cdots, w^{(n-1)\ell})^{\mathrm{t}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} \underset{k'=j-k}{=} w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell}$$

Indizes modulo n
$\rightsquigarrow \quad k' \in \{j-n+1, \dots, -1\} \mathrel{\widehat{=}} k' \in \{j+1, \dots, n-1\}$
$\implies \quad \sum_{k'} \cdots = \lambda_\ell$, d.h. $Av_\ell = \lambda_\ell v_\ell$
schreibe die Identität für v_ℓ, $\ell = 0, \dots, n-1$, in Matrixform

$$A \underbrace{(v_0, \dots, v_{n-1})}_{W} = (v_0, \dots, v_{n-1}) D, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$W/\sqrt{n}$ unitär und $W = W^{\mathrm{t}} \implies (W/\sqrt{n})^{-1} = W^*/\sqrt{n}$ bzw.
$W^{-1} = \overline{W}/n$
$\rightsquigarrow \quad (\overline{W}/n) AW = D$, d.h. die behauptete Diagonalisierung

Beispiel

Diagonalform der zyklischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fourier-Matrix: $W = (\mathrm{i}^{jk})_{j,k=0,1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{\overline{W}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Diagonalisierung: $\frac{1}{4}\overline{W}AW = \operatorname{diag}(4, 2, 0, 2)$

A reell $\rightsquigarrow$ reelle Basis für den Eigenraum zum Eigenwert 2 durch Linearkombinationen der komplexen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{(zweite und vierte Spalte von } W\text{)}$$

$\rightsquigarrow$ reelle Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} - \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$