Diagonalform hermitescher Matrizen

Die Eigenwerte λ_k einer hermiteschen $n \times n$-Matrix A ($A = A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$ bzw. $A = A^{\mathrm{t}}$ für reelle Matrizen) sind reell, und es existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren u_k. Folglich ist

$$U^* A U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad U^* = U^{-1}\,,$$

mit der unitären Matrix $U = (u_1, \ldots, u_n)$ und λ_k den Eigenwerten von A.

Beweis

hermitesch $\implies$ normal $\implies$ A ist unitär diagonalisierbar:

$$U^*AU = D, \quad U^* = U^{-1},\ D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

zu zeigen: $\lambda \in \mathbb{R}$ für alle Eigenwerte λ

$Av = \lambda \quad \implies$

$$\begin{aligned} \lambda v^* v &= v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^*v)^*v = (Av)^*v = (\lambda v)^*v \\ &= \overline{\lambda} v^* v \end{aligned}$$

Division durch $|v|^2 = v^*v \quad \implies \quad \lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$

Beispiel

Diagonalisierung der hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = A^* = \overline{A}^{\mathrm{t}}$$

$\det A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists$ Eigenwert $\lambda = 0$
zugehöriger Eigenvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Spur} A = 3 = \lambda + \varrho \quad \rightsquigarrow \quad$ zweiter Eigenwert $\varrho = 3$
zugehöriger Eigenvektor $w \perp v$, d.h.

$$w = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(w^* v = \overline{w}^{\mathrm{t}} v = (1-\mathrm{i}, -1)(1, 1-\mathrm{i})^{\mathrm{t}} = 0)$

Normierung $\rightsquigarrow$ unitäre Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierung

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*$$

Überprüfung durch Ausmultiplizieren

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}}_{A} \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$