Determinanten spezieller Matrizen

Die Determinante einiger spezieller $n \times n$-Matrizen A läßt sich unmittelbar angeben.

- Dreiecksmatrix ($a_{j,k} = 0$ für $j < k$ oder $j > k$):

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$$

- Blockdiagonalmatrix (Null bis auf quadratische Diagonalblöcke $A_{k,k}$):

$$\det A = \prod_k \det A_{k,k}$$

- Unitäre und orthogonale Matrix: ($A^{-1} = A^*$):

$$|\det A| = 1$$

  bzw. $\det A \in \{-1, 1\}$ für $a_{j,k} \in \mathbb{R}$ und $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$

Beweis

(i) Obere Dreiecksmatrix:

Wegen $\det A = \det A^{\mathrm{t}}$ genügt es, eine obere Dreiecksmatrix zu betrachten.

Permutation p von $(1, \ldots, n)$ ungleich der Identität

$$\Longrightarrow \quad \exists k \,\mathrm{mit}\, p(k) > k \,(k = \min\{\ell : \, p(\ell \neq \ell)\}) \;\Longrightarrow\; a_{p(k),k} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p)\, a_{p(1),1} \cdots a_{p(n),n} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$$

(ii) Blockdiagonalmatrix:

betrachte zunächst eine Aufteilung in zwei Diagonalblöcke der Größe n_1 und n_2

$$a_{p(1),1} \cdots a_{p(n),n} \neq 0 \quad \text{nur für}$$
$$p(1), \cdots, p(n_1) \leq n_1 \,\wedge\, p(n_1 + 1), \cdots, p(n) \geq n_1 + 1$$

$\implies$ Produktform der Determinante:

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p)\,(a_{p(1),1} \cdots a_{p(n_1),n_1})(a_{p(n_1+1),n_1+1} \cdots a_{p(n),n}) =$$
$$= \Big(\sum_{q \in S_{n_1}} \sigma(q)\, a_{q(1),1} \cdots a_{q(n_1),n_1} \Big) \Big(\sum_{r \in S_{n_2}} \sigma(r)\, a_{n_1+r(1),n_1+1} \cdots a_{n_1+r(n_2),n} \Big)$$
$$= \det A_{1,1} \det A_{2,2}$$

Induktion mit Abspaltung von jeweils einem Diagonalblock $\implies$ Aussage für eine Aufteilung in mehr als zwei Blöcke

(iii) Orthogonale und unitäre Matrix:
Vertauschbarkeit von komplexer Konjugation mit Summen und Produkten, $\det A = \det A^{\mathrm{t}}$ und $\det(AB) = \det A \det B$ $\implies$

$$\begin{aligned} 1 &= \det E = \det(A^* A) = \det A^* \det A \\ &= \overline{\det A^{\mathrm{t}}} \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2 \end{aligned}$$

A reell $\implies$ $\det A \in \{-1, 1\}$

Beispiel

Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A: Dreiecksmatrix $\quad \Longrightarrow \quad \det A = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$

B: Blockdiagonalmatrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2, \quad \Longrightarrow \quad \det B = (-2) \cdot 5 = -10$$

$C/3$: orthogonal $\quad \Longrightarrow \quad |\det C| = 3^3\,|\det(C/3)| = 27$

Sarrus-Regel $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \cdot 2$$

$$-2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = -27$$