Determinante als antisymmetrische Multilinearform

Die Determinante

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

einer quadratischen Matrix A mit Spalten a_j kann durch folgende Eigenschaften definiert werden.

- Multilinearität:

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)$$

- Antisymmetrie:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)\,,$$

  insbesondere $\det A = 0$ bei zwei gleichen Spalten

- Normierung:

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1, \quad (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}\,.$$

Mit den definierenden Regeln lässt sich eine Determinante als Summe n-facher Produkte entwickeln:

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p)\, a_{p(1),1} \cdots a_{p(n),n}\,,$$

wobei über alle Permutationen p von $(1,\ldots,n)$ summiert wird, und $\sigma(p)$ das Vorzeichen von p bezeichnet.

Man benutzt ebenfalls die Schreibweisen

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Wegen der hohen Anzahl der Summanden (es exisitieren $n!$ Permutationen) ist die explizite Darstellung der Determinante für die praktische Berechnung schlecht geeignet. Sie ist jedoch unmittelbar mit den definierenden Eigenschaften verknüpft und wird zum Beweis sowie zur Herleitung einiger anderer Eigenschaften benötigt.

Beweis

(i) Eigenschaften $\implies$ Entwicklung der Determinante via Permutationen: Darstellung der Spalten von A als Linearkombinationen der Einheitsvektoren e_j,

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} e_j \,,$$

und Multilinearität $\implies$

$$\det A = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_1,1} \cdots a_{k_n,n} \underbrace{\det(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n})}_{=d_k}$$

Antisymmetrie $\implies$

- $\det(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}) = 0$, falls nicht alle e_{k_ν} verschieden sind, d.h. nur Permutationen sind zu berücksichtigen, $k = (p(1), \ldots, p(n))$, $p \in S_n$
- $d_k = (-1)^{\tau(k)} \det(e_1, \ldots, e_n)$, wobei $\tau(k)$ die modulo 2 eindeutig bestimmte Anzahl von Vertauschungen bezeichnet, um die Einheitsvektoren in die kanonische Reihenfolge zu bringen

Definition des Vorzeichens einer Permutation und Normierung $\implies$

$$d_k = \det(e_{p(1)}, \ldots, e_{p(n)}) = \sigma(p) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(p)$$

(ii) Entwicklung $\implies$ Eigenschaften:
Multilinearität $\Longleftarrow$ Produkte

$$a_{k_1,1}\cdots a_{k_n,n}$$

enthalten aus jeder Spalte jeweils genau ein Element.
Antisymmetrie $\Longleftarrow$ Vertauschung von Spalten ändert Vorzeichen der Permutation.
Normierung $\Longleftarrow$ Für die Einheitsmatrix existiert nur ein nichttrivialer Summand:

$$a_{1,1}\cdots a_{n,n} = 1\cdots 1 = 1\,.$$

Beispiel

Determinante einer (2×2)-Matrix:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(i) Berechnung mit Hilfe der definierenden Eigenschaften:

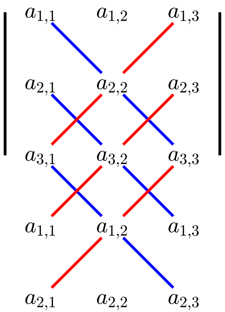
$$\begin{aligned} \det(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) &= a\det(e_1, be_1 + de_2) + c\det(e_2, be_1 + de_2) \\ &= ab\det(e_1, e_1) + ad\det(e_1, e_2) + cb\det(e_2, e_1) + cd\det(e_2, e_2) \\ &= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + cb \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc \end{aligned}$$

(ii) Entwicklung nach Permutationen:
Dimension $n = 2 \quad \rightsquigarrow \quad n! = 2$ Permuationen $p = (1, 2)$ und $q = (2, 1)$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} &= \sigma(p) a_{p(1),1} a_{p(2),2} + \sigma(\ell) a_{q(1),1} a_{q(2),2} \\ &= 1 \cdot a_{1,1} a_{2,2} + (-1) \cdot a_{2,1} a_{1,2} = ad - cb \end{aligned}$$

Beispiel

Die Determinante einer 3×3-Matrix ist eine Summe von Produkten, die den verschiedenen Diagonalen entsprechen. Dieses sogenannte Sarrus-Schema ist in der Abbildung illustriert.



$$|A| = \\ +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

konkrete Matrix:

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = (8 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 9 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \cdot 7) \\ -(4 \cdot 5 \cdot 6 + 8 \cdot 9 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 360$$

Überprüfung des Sarrus-Schemas durch Entwicklung nach Permutationen

$$|A| = \sum_{p \in S_3} \sigma(p)\, a_{p(1),1} a_{p(2),2} a_{p(3),3}$$

$\rightsquigarrow$ 6 Summanden

p	Vertauschungen	$\sigma(p)$	Produkt
$(1,2,3)$		$+$	$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(2,3,1)$	$\to (3,2,1) \to (1,2,3)$	$+$	$a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(3,1,2)$	$\to (2,1,3) \to (1,2,3)$	$+$	$a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(3,2,1)$	$\to (1,2,3)$	$-$	$a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(1,3,2)$	$\to (1,2,3)$	$-$	$a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(2,1,3)$	$\to (1,2,3)$	$-$	$a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

Berechnung von Determinanten

Die Determinante einer Matrix bleibt bei Addition eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile zu einer anderen Spalte oder Zeile unverändert. Sie ändert ihr Vorzeichen bei Vertauschung von Spalten oder Zeilen. Analog zum Gauß-Algorithmus für die Lösung linearer Gleichungssysteme kann man mit diesen Operationen die Determinante auf Dreiecksform transformieren,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,n} \\ O & & \vdots \\ O & O & d_{n,n} \end{vmatrix}, \quad d_{j,k} = 0 \text{ für } j > k\,,$$

und als Produkt der Diagonalelemente berechnen:

$$(-1)^\ell \det A = \det D = d_{1,1} \cdots d_{n,n}$$

mit ℓ der Anzahl der Spalten- bzw. Zeilen-Permutationen.

Eine Determinante ist genau dann nicht Null, wenn die Spalten (Zeilen) eine Basis bilden. Insbesondere ist die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten oder Zeilen Null.

Es gelten die folgenden Regeln:

- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
- $\det A = \det A^{\mathrm{t}}$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Beweis

(i) Transposition:

Entwicklung nach Permutationen

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p)\, a_{p(1),1} \cdots a_{p(n),1}$$

Umordnung der Faktoren (Spaltenindex $1, \ldots, n \to$ Spaltenindex $p^{-1}(1), \ldots, p^{-1}(n)$) $\rightsquigarrow$

$$a_{p(1),1} \cdots a_{p(n),1} = a_{1,p^{-1}(1)} \cdots a_{n,p^{-1}(n)}$$

mit p^{-1} der inversen Permutation zu p
$\sigma(p) = \sigma(p^{-1})$ $\rightsquigarrow$

$$\sum_{p^{-1}} \sigma(p^{-1})\, a^{\mathrm{t}}_{p^{-1}(1),1} \cdots a^{\mathrm{t}}_{p^{-1}(n),1} = \det A^{\mathrm{t}}\,,$$

d.h. $\det A = \det A^{\mathrm{t}}$

$\implies$ Aussagen für Spalten gelten entsprechend für Zeilen.

(ii) Addition von Spaltenvielfachen:

$$\det(\ldots, a_j + sa_k, \ldots, a_k, \ldots) = \\ \det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) + s \underbrace{\det(\ldots, a_k, \ldots, a_k, \ldots)}_{=0}$$

aufgrund der Linearität und Antisymmetrie der Determinante

(iii) Basis-Test:
Die lineare Hülle der Spalten einer Matrix A bleibt bei Addition von Spaltenvielfachen und Spaltenvertauschungen unverändert, damit auch der Rang, ebenso wie der Betrag der Determinante.
Die Spalten a_k bilden genau dann eine Basis, wenn Rang A maximal ist, d.h. mit der Dimension n von A übereinstimmt.
Damit gilt

$$\begin{aligned} \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ Basis} &\iff \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} D = n \\ &\iff d_{k,k} \neq 0,\ k = 1, \ldots, n \\ &\iff |d_{1,1} \cdots d_{n,n}| = |\det D| = |\det A| \neq 0 \end{aligned}$$

(v) Produkte von Matrizen:

$\det A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig

$\Longrightarrow \quad Ab_1, \ldots, Ab_n$ linear abhängig, da die Spalten Ab_k von AB Linearkombinationen der Spalten a_ℓ von A sind

$\Longrightarrow \quad \det(AB) = \det(Ab_1, \ldots, Ab_n) = 0 = \det A \det B \quad \checkmark$

für $\det A \neq 0$ definiere

$$d(b_1, \ldots, b_n) = \det(AB)/\det A$$

und verifiziere die definierenden Eigenschaften der Determinante

Antisymmetrie und Normierung unmittelbar ersichtlich

zum Beweis der Linearität bemerke für $b_k = \alpha u + \beta v$

$$\begin{aligned} d(\ldots, \alpha u + \beta v, \ldots) &= \det(\ldots, \alpha Au + \beta Av, \ldots)/\det A \\ &= \alpha d(\ldots, u, \ldots) + \beta d(\ldots, v, \ldots) \end{aligned}$$

(v) Inverse:

$AA^{-1} = E \quad \Longrightarrow$

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

Beispiel

Berechnung der Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

durch Transformation auf Dreiecksform mit Gauß-Operationen (Skalierung, Addition von Zeilenvielfachen und Zeilenvertauschungen)

Zeile 3 - 3 $\times$ Zeile 1 $\quad\rightsquigarrow$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vertauschen von Spalte 2 und Spalte 4 $\rightsquigarrow$

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Zeile 3 + Zeile 2, Zeile 4 - Zeile 2 $\rightsquigarrow$

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 24$$