Cramersche Regel

Für ein quadratisches lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist

$$x_j \det A = \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)\,,$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten der Koeffizientenmatrix A bezeichnen.

Ist $\det A \neq 0$, so existiert eine eindeutige Lösung x, deren Komponenten x_j als Quotienten der Determinanten in obiger Gleichung bestimmt werden können.

Wählt man b als den k-ten Einheitsvektor e_k, so erhält man die k-te Spalte $(c_{1,k}, \ldots, c_{n,k})^{\mathrm{t}}$ der Inversen $C = A^{-1}$:

$$c_{j,k} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det A}\,.$$

Nach dem Entwicklungsatz für Determinanten ist

$$\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \ldots, a_n) = (-1)^{j+k} \det \tilde{A}_{j,k}$$

mit $\tilde{A}_{j,k}$ der Matrix, die durch Streichen der Spalte j und der Zeile k von A entsteht.

Beweis

Multilinearität und Antisymmetrie der Determinante $\quad\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\det(a_1,\ldots,a_{k-1},b,a_{k+1},\ldots,a_n) &= \det(a_1,\ldots,a_{k-1},\sum_{j=1}^{n} a_j x_j, a_{k+1},..,a_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{k-1},a_j,a_{k+1},..,a_n) \\
&= x_k \det(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)
\end{aligned}
$$

$b = e_k \quad \rightsquigarrow \quad$ k-te Spalte $x = (c_{1,k},\ldots,c_{n,k})^{\mathrm{t}}$ der Inversen, denn

$$AC = E = (e_1,\ldots,e_n) \quad\Longrightarrow\quad Ax = e_k$$

Beispiel

Berechnung der Inversen C der (2×2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel $\quad \rightsquigarrow$

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A}$$

bzw. mit $\det A = ad - cb$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel

Lineares Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}}_{b}$$

eindeutige Lösung, da

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{Entwickeln} \\ \text{nach Zeile 1}}}{=} 4 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -16 + 11 + 14 = 9 \neq 0 \end{aligned}$$

Cramersche Regel $\implies$

$$x_1 = \det(b, a_2, a_3) / \det A \text{ mit } a_k \text{ den Spalten von } A$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & 4 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \left(8 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{-32 + 23 + 18}{9} = 1
\end{aligned}$$

analog, $x_2 = \det(a_1, b, a_3) / \det A$ und $x_3 = \det(a_1, a_2, b) / \det A$, d.h.

$$x_2 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ -2 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad x_3 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -3 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -1$$