# Charakteristisches Polynom

Die Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix $A$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} .$$

Aufgrund der Eigenschaften von Determinanten sind die Eigenwerte invariant unter Transposition und Ähnlichkeitstransformation der Matrix $A$.

Für jeden Eigenwert $\lambda$ sind Eigenvektoren $v$ nichttriviale Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)v = (0, \dots, 0)^{\mathrm{t}} .$$

Um den Eigenraum $V_\lambda$, d.h. alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$, zu bestimmen, kann man dieses System auf Zeilenstufenform transformieren. Dann sind

$$\dim V_\lambda = n - \underbrace{\mathrm{Rang}(A - \lambda E)}_{\text{Anzahl der Pivots}}$$

Komponenten von $v$ frei wählbar. Bei kleineren Matrizen ist die Bestimmung der Eigenvektoren nach Vorgabe geeigneter Komponenten auch unmittelbar durchführbar.

## Beweis

(i) Charakteristisches Polynom:
$\lambda$ ist genau dann Eigenwert der $n \times n$-Matrix $A$, wenn

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}\,.$$

$\iff$ $\exists$ eine nicht-triviale Lösung $v$ des homogenen linearen Gleichungssystem $(A - \lambda E)v = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$
$\iff$ $(A - \lambda E)$ ist singulär $\iff$ $\det(A - \lambda E) = 0$

(ii) Transposition und Ähnlichkeitstransformation:

- $\det B = \det B^{\mathrm{t}} \implies$

$$\det(A^{\mathrm{t}} - \lambda E) = \det(A^{\mathrm{t}} - \lambda E)^{\mathrm{t}} = \det(A - \lambda E)$$

- $\det Q^{-1} = 1/\det Q$, $\det(CD) = (\det C)(\det D) \implies$

$$\begin{aligned} \det(Q^{-1}AQ - \lambda E) &= \det(Q^{-1}(A - \lambda E)Q) \\ &= \det Q^{-1} \det(A - \lambda E) \det Q = \det(A - \lambda E) \end{aligned}$$

## Beispiel

Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Charakteristisches Polynom $p_A(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 2\lambda + 4(2-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4$$

Nullstellen $\rightsquigarrow$ Eigenwerte
Raten (Teiler des Absolutgliedes) $\rightsquigarrow$ $\lambda_1 = 2$
Abdividieren des Linearfaktors $\lambda - 2$,

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2\,,$$

und Lösungsformel für quadratische Gleichungen $\rightsquigarrow$ $\lambda_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}$

(ii) Eigenvektoren:

- Ein Eigenvektor $v$ zum Eigenwert 2 löst das homogene System

$$(A-2E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Rang $A > 1$ und $\leq 3 \quad \Longrightarrow \quad$ Rang $A = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ eine Komponente von $v$ beliebig wählbar

$v_1 = s \quad \underset{\text{Gleichung 2,3}}{\Longrightarrow} \quad v_3 = -2s,\ v_2 = 0$, d.h.

$$v \parallel (1,0,-2)^{\mathrm{t}}, \quad V_2 = \{(s,0,-2s)^{\mathrm{t}} :\ s \in \mathbb{R}\}$$

Ebenfalls möglich (notwendig in komplizierteren Fällen): Transformation von $A - \lambda E$ auf Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ein Eigenvektor $w$ zum Eigenwert $1+\mathrm{i}$ löst

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1 = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\dim V_{1+\mathrm{i}} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ wähle (z.B.) $w_3 = s$
Gleichung 3 $\quad \Longrightarrow \quad w_2 = s(-1+\mathrm{i})/2$
Gleichung 2 $\quad \Longrightarrow \quad w_1 = (-(1-\mathrm{i})w_2 - w_3) = s(-1-\mathrm{i})/2$
konsistent (notwendigerweise!) mit Gleichung 1
$\rightsquigarrow$

$$w \parallel \left(\frac{-1-\mathrm{i}}{2}, \frac{-1+\mathrm{i}}{2}, 1\right)^{\mathrm{t}}, \quad V_{1+\mathrm{i}} = \left\{ s\left(\frac{-1-\mathrm{i}}{2}, \frac{-1+\mathrm{i}}{2}, 1\right)^{\mathrm{t}} : \; s \in \mathbb{R} \right\}$$

- $A$ reell $\quad \Longrightarrow \quad$ Eigenvektoren zu $\lambda = 1 \pm \mathrm{i}$ komplex konjugiert, d.h. die zu $1-\mathrm{i}$ gehörigen Eigenvektoren sind

$$\overline{w} \parallel \left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}, \frac{-1-\mathrm{i}}{2}, 1\right)^{\mathrm{t}}$$