Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Ein Skalarprodukt lässt sich mit Hilfe der assoziierten Norm abschätzen:

$$|\langle u, v\rangle| \le |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w\rangle}\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $u \parallel v$.
Für ein reelles Skalarprodukt kann durch

$$\cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{|u|\ |v|}$$

ein Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen u und v definiert werden.

Beweis

$v = su \quad \rightsquigarrow \quad$ Gleichheit

Die Ungleichung bleibt bei Multiplikation von u bzw. v mit einem Skalar unverändert.

$\rightsquigarrow \quad$ o.B.d.A. $|u|^2 = |v|^2 = 1$, $u \not\parallel v$

betrachte ein komplexes Skalarprodukt (Argumentation schließt den reellen Fall ein)

$$\langle v, u\rangle = r \underbrace{\exp(\mathrm{i}\varphi)}_{=:\lambda}, \quad r > 0\,,$$

u, v nicht parallel, $\bar\lambda\lambda = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= |u|^2 + \bar\lambda\lambda|v|^2 - \bar\lambda \underbrace{r\exp(\mathrm{i}\varphi)}_{\langle v,u\rangle} - \lambda \underbrace{\overline{r\exp(\mathrm{i}\varphi)}}_{\langle u,v\rangle} = 1 + 1 - r - r\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$|\langle u, v\rangle| = r < 1 = |u|\,|v| \quad \checkmark$$

Beispiel

Illustration der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$f_k(x) = x^k \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} |f_k| &= \left(\int_0^1 (x^k)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = (2k+1)^{-1/2} \\ \langle f_k, f_\ell\rangle &= \int_0^1 x^k x^\ell\,\mathrm{d}x = (k+\ell+1)^{-1} \end{aligned}$$

Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$(k+\ell+1)^{-1} = |\langle f_k, f_\ell\rangle| \le |f_k||f_\ell| = (2k+1)^{-1/2}(2\ell+1)^{-1/2}$$

$\checkmark$, denn Quadrieren und Kehrwertbildung $\rightsquigarrow$

$$k^2+\ell^2+1+2k\ell+2k+2\ell \ge 4k\ell+2k+2\ell+1 \quad \Longleftrightarrow \quad (k-\ell)^2 \ge 0$$