Bild und Kern

Für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ bezeichnet man mit

$$\text{Kern}\, L = \{v \in V : \; L(v) = 0_W\} \; \subseteq V$$

den Kern und mit

$$\text{Bild}\, L = \{w \in W : \; \exists v \in V \text{ mit } L(v) = w\} \; \subseteq W$$

das Bild von L.

Beide Mengen sind Unterräume und

$$\dim V = \dim \text{Kern}\, L + \dim \text{Bild}\, L\,,$$

falls $\dim V < \infty$.

Beweis

(i) Kern L ist Unterraum von V:
zu zeigen: Abgeschlossenheit bezüglich Addition und skalarer Multiplikation
Für $u, v \in$ Kern L, $s \in K$ folgt aus der Linearität von L

$$L(s\,u) = s\,L(u) = s\,0 = 0$$

und

$$L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\,,$$

d.h. su, $u + v \in \mathrm{Kern}(L)$
(ii) Bild L ist Unterraum von W:
Für $u, v \in$ Bild L mit $u = L(x)$, $v = L(y)$ und $s \in K$ folgt analog

$$s\,u = s\,L(x) = L(s\,x)$$

und

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y)\,,$$

d.h. die Existenz entsprechender Urbilder
$\Longrightarrow \quad su,\ u + v \in$ Bild L

(iii) Dimensionsformel:
Wähle eine Basis $E' = \{e_1, \dots, e_m\}$ für Kern L und ergänze diese durch $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ zu einer Basis E von V.

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} v_k e_k\right) = \sum_{k=m+1}^{n} v_k L(e_k)$$

$\implies$ Bild $L = \operatorname{span} F,\ F = \{L(e_{m+1}), \dots, L(e_n)\}$
F linear unabhängig, also eine Basis von Bild L, denn

$$0 = \sum_{k=m+1}^{n} v_k L(e_k) = L\left(\sum_{k=m+1}^{n} v_k e_k\right) \quad \implies \quad \sum_{k=m+1}^{n} v_k e_k \in \text{Kern } L$$

und somit $v_k = 0$
Vergleich der Anzahlen der Basisvektoren $\implies$ Dimensionsformel

Beispiel

Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Lx = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(i) Kern:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Lx = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3\,,$$

d.h. Kern $L = \{(t,\ t,\ t)^{\mathrm{t}} :\ t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}((1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{t}})$

(ii) Bild:

Bild L wird durch die Bilder der Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0)^t$, $e_2 = (0, 1, 0)^t$, $e_3 = (0, 0, 1)^t$ aufgespannt.

$$\text{Bild } L = \text{span}(Le_1, Le_2, Le_3) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$Le_3 = -Le_1 - Le_2$ und $Le_1 \not\parallel Le_2$, d.h. Le_1, Le_2 linear unabhängig $\implies$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Basis für Bild } L$$

(iii) Dimensionsformel:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 \stackrel{!}{=} \dim \text{Kern } L + \dim \text{Bild } L = 1 + 2 \quad \checkmark$$

Beispiel

k-te Ableitung D^k auf dem Raum der Polynome $\mathbb{P}_n$ vom Grad $\leq n$

(i) $k = 1$ und $n = 2$: $\{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\}$ Basis für $\mathbb{P}_2$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \Longrightarrow \quad (Dp)(x) = a_1 + 2a_2x \in \mathbb{P}_1$$

Die Ableitung D annuliert Konstanten, einen eindimensionalen Unterraum.
$\Longrightarrow \quad \dim \mathbb{P}_2 = 3, \quad \dim \operatorname{Kern} D = 1, \quad \dim \operatorname{Bild} = 2$
(ii) Allgemeiner Fall:

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell \quad \Longrightarrow \quad (D^k p)(x) = \sum_{\ell=k}^{n} \frac{\ell!}{(\ell-k)!} a_\ell x^{\ell-k} \in \mathbb{P}_{n-k}$$

D^k annullert Polynome vom Grad $< k$
$\rightsquigarrow$ Dimensionsformel

$$n + 1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \operatorname{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \operatorname{Kern}} = \dim \mathbb{P}_{n-k} + \dim \mathbb{P}_{k-1} \quad \checkmark$$