Basis

Eine Teilmenge B eines Vektorraumes V ist eine Basis von V, wenn die Vektoren in B linear unabhängig sind und sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination

$$v = \sum_k c_k b_k, \quad b_k \in B\,,$$

darstellen lässt. Die Koeffizienten c_k werden als Koordinaten von v bezüglich der Basis B bezeichnet:

$$v \leftrightarrow v_B = (c_1, c_2, \ldots)^{\mathrm{t}}\,.$$

Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, so ist die Anzahl der Basisvektoren eindeutig bestimmt und wird die Dimension von V genannt:

$$n = \dim V\,.$$

Man setzt $\dim V = 0$ für $V = \{0\}$ und $\dim V = \infty$ für einen Vektorraum ohne endliche Basis.

Für $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$ besteht eine Basis aus n Vektoren b_k, und die Matrix $B = (b_1, \ldots, b_n)$ mit den Spalten b_k ist invertierbar, d.h. $\det B \neq 0$.

Beweis

Eindeutigkeit der Dimension im endlichen Fall

hinreichend zu zeigen:
Hat ein Vektorraum eine n-elementige Basis

$$b_1, \ldots, b_n \,,$$

so sind $n+1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ (und damit auch mehr als $n+1$ Vektoren) linear abhängig.
($\implies$ Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit bei Basen mit unterschiedlich vielen Vektoren)

Beweis durch Induktion:
$(n-1) \to n$: betrachte Basisdarstellung der Vektoren v_k:

$$v_k = \sum_{\ell=1}^{n} \gamma_{k,\ell} b_\ell, \quad k = 1, \ldots, n+1$$

trivialer Fall:

$$\gamma_{n+1,1} = \cdots = \gamma_{n+1,n} = 0$$

$$\implies \quad v_{n+1} = 0 \quad \implies \quad \text{lineare Abhängigkeit der Vektoren } v_k$$

andernfalls, nach geeigneter Nummerierung, $\gamma_{n+1,n} \neq 0$
definiere Vektoren v'_k, $k = 1, \ldots, n$, die sich als Linearkombination der $n-1$ Vektoren $b_1, \ldots, b_{n-1}$ darstellen lassen:

$$\begin{aligned} v'_k &= v_k - \frac{\gamma_{k,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1} \\ &= (\gamma_{k,1} b_1 + \cdots + \gamma_{k,n} b_n) - \frac{\gamma_{k,n}}{\gamma_{n+1,n}} (\gamma_{n+1,1} b_1 + \cdots + \gamma_{n+1,n} b_n) \end{aligned}$$

Koeffizient von $b_n = 0 \quad \Longrightarrow$

$$v'_1, \ldots, v'_n \in V' = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$$

Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die Basis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ von V'
$\Longrightarrow \quad \exists$ nichttriviale Linearkombination

$$\lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n = 0$$

Einsetzen der Definition von $v'_k \quad \rightsquigarrow$
Linearkombination der v_k, also die behauptete lineare Abhängigkeit