Algebraische und geometrische Vielfachheit

Die Vielfachheit eines Eigenwerts λ einer $n \times n$-Matrix A als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

wird als algebraische Vielfachheit m_λ bezeichnet, die Dimension d_λ des Eigenraums V_λ als geometrische Vielfachheit.

Es gilt

$$d_\lambda \leq m_\lambda, \quad \sum_\lambda m_\lambda = n$$

sowie

$$d_\lambda = n - \operatorname{Rang}(A - \lambda E)\,.$$

Beispiel

Eigenvektorstruktur der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

mit identischen charakteristischen Polynomen

(i) Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\text{Matrix} - \lambda\,\text{Einheitsmatrix}) \\ &\underset{A}{=} (4-\lambda)^3 \\ &\underset{B}{=} (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda \\ &\underset{C}{=} (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ algebraische Vielfachheit $m_4 = 3$ für alle Matrizen

(ii) Eigenräume:

- A:

$$A - 4E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Rang}(A - 4E) = 0,\ \dim V_4 = 3 - 0 = 3$$

$$\Longrightarrow \qquad V_4 = \mathbb{R}^3, \text{ jeder Vektor ungleich } (0,0,0)^{\mathrm{t}} \text{ ist Eigenvektor}$$

- B:

$$B - 4E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Rang}(B - 4E) = 1,\ \dim V_4 = 2$$

  Eigenvektoren $\perp (0,1,1)^{\mathrm{t}}$,
  mögliche Basis für V_4: $\{(1,0,0)^{\mathrm{t}}, (0,1,-1)^{\mathrm{t}}\}$

- C:

$$C - 4E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Rang}(C - 4E) = 2, \, \dim V_4 = 1$$

Eigenvektoren $\parallel (2, 0, -1)^{\mathrm{t}}$, $V_4 = \{(2s, 0, -s)^{\mathrm{t}} : \, s \in \mathbb{R}\}$