Ähnlichkeitstransformation

Bei einer Ähnlichkeitstransformation einer quadratischen Matrix A,

$$A \to B = Q^{-1} A Q\,,$$

bleiben die Eigenwerte erhalten.

Die Eigenvektoren werden gemäß dem durch die invertierbare Matrix Q beschriebenen Basiswechsel transformiert, d.h. einem Eigenvektor v von A zum Eigenwert λ entspricht der Eigenvektor $w = Q^{-1} v$ von B zum gleichen Eigenwert.

Ebenfalls invariant unter Ähnlichkeitstransformationen sind die Determinante und die Spur einer Matrix, da sie aus den Eigenwerten berechnet werden können:

$$\det A = \prod \lambda_k, \quad \operatorname{Spur} A = \sum \lambda_k\,.$$

Beweis

$$Av = \lambda v \quad \wedge \quad w = Q^{-1}v$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} Bw &= Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v \\ &= Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v \\ &= \lambda w \end{aligned}$$

Beispiel

Ähnlichkeitstransformation $A \to B = Q^{-1}AQ$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnung von B:

$$\begin{aligned} B = Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Eigenwerte und -Vektoren von A:

$$\lambda = 2,\ v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda} = 3,\ \tilde{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Transformation der Eigenvektoren:

$\rightsquigarrow$ Eigenvektoren von B

$$w = Q^{-1}v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{w} = Q^{-1}\tilde{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Probe

$$\begin{aligned} Bw &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2w \\ B\tilde{w} &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\tilde{w} \end{aligned}$$

gleiche Eigenwerte $\lambda = 2$, $\tilde{\lambda} = 3$ $\quad\checkmark$

(iv) Invarianz von Determinante und Spur:

$$\det A = 4 + 2 = 6 = -6 + 12 = \det B$$
$$\operatorname{Spur} A = 1 + 4 = 5 = -1 + 6 = \operatorname{Spur} B$$