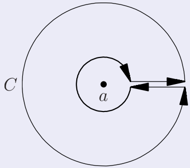
Umlaufzahl

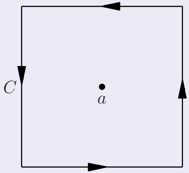
Für einen stückweise differenzierbaren, geschlossenen Weg C definiert man für $a \notin C$

$$n(C,a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{dz}{z-a}$$

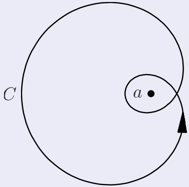
als die Umlaufzahl von C bezüglich a.



$n(C,a) = 0$



$n(C,a) = 1$



$n(C,a) = 2$

Anschaulich gibt $n(C,a)$ an, wie oft C den Punkt a umrundet.
Insbesondere ist $n(C,a) = 1$ für den Rand C eines Gebietes, das a enthält.

Beweis:

C: $t \mapsto z(t)$, $t_0 \le t \le t_1$
zu zeigen:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{z(s) - a}\, ds = k\,(2\pi\mathrm{i})$$

für $t = t_1$ bzw. dazu äquivalent, dass $\exp(\varphi(t_1)) = 1$

betrachte

$$p(t) = \exp(-\varphi(t))(z(t) - a)$$

Produkt- und Kettenregel $\quad\rightsquigarrow$

$$p' = p\,\underbrace{\frac{-z'}{z-a}}_{-\varphi'(t)} + \frac{p}{z-a}\,z' = 0$$

bis auf Sprungstellen von z'

$\Longrightarrow \quad p$ konstant, insbesondere $p(t_0) = p(t_1)$, und

$$\exp(\varphi(t_1)) = \frac{z(t_1) - a}{p(t_1)} = \frac{z(t_1) - a}{p(t_0)} = 1$$

wegen $\varphi(t_0) = 0$, $p(t_0) = z(t_0) - a$ und $z(t_0) = z(t_1)$