Residuenkalkül für trigonometrische Integranden

Ein Integral der Form

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\, dt$$

mit einer rationalen Funktion r kann durch die Substitution

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dz = \mathrm{i}z\, dt\,,$$

in das komplexe Kurvenintegral

$$\int_C f(z)\, dz, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\,,$$

über den entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Einheitskreis $C: |z| = 1$ überführt werden.

Nach dem Residuensatz gilt

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{|a|<1} \operatorname*{Res}_a f\,,$$

d.h. das Integral ist das $(2\pi\mathrm{i})$-fache der Summe der Residuen von f an den Polstellen a im Inneren des Einheitskreises.

Beispiel:

trigonometrisches Integral

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{c + \cos t}\, dt, \quad c \in (1, \infty)$$

Substitution

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad dz = iz\, dt, \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

und Symmetrie des Integrals $\quad \rightsquigarrow$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{c + \cos t}\, dt = \int_C \frac{1}{\mathrm{i}}\, \frac{1}{z^2 + 2cz + 1}\, dz$$

mit C dem entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Einheitskreis

Bestimmung der Nullstellen des Nenners und Faktorisierung $\rightsquigarrow$

$$I = \int\limits_C \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{1}{\left(z + c - \sqrt{c^2 - 1}\right)\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)}\, dz = \int\limits_C f(z)\, dz$$

Polstelle im Inneren des Einheitskreises: $a = -c + \sqrt{c^2 - 1}$
($-c - \sqrt{c^2 - 1} < -1 - 0$, außerhalb)
Residuum

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \left. \frac{1}{\mathrm{i}\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)} \right|_{z = -c + \sqrt{c^2 - 1}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{c^2 - 1}}$$

Residuensatz $\quad \Longrightarrow$

$$I = 2\pi \mathrm{i} \operatorname*{Res}_a f = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}$$