Residuenkalkäl für transzendente Integranden

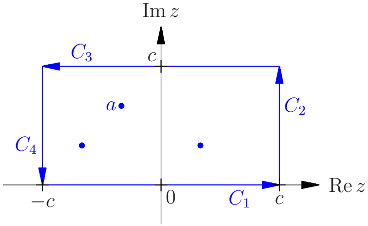
Für eine rationale Funktion f ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad kleiner als der Nennergrad gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname*{Res}_{z=a}\left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\right), \quad \lambda\in\mathbb{R}^+\,.$$

Für $\lambda < 0$ wird entsprechend die negative Summe aller Residuen in der unteren Halbebene gebildet.

Beweis:

geschlossener Integrationsweg



c so groß, dass alle Polstellen a von $f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cdot}$ mit $\operatorname{Im} a > 0$ im Rechteck $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ liegen
Residuensatz $\quad \Longrightarrow$

$$\int_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_{z=a} \left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\right)$$

zeige: $I_k = |\int_{C_k} \ldots| \to 0,\ c \to \infty$, für $k = 2, 3, 4$

Zählergrad kleiner als der Nennergrad $\implies$

$$\exists M > 0 : \; |f(z)| \le \frac{M}{|z|}, \quad |z| \ge r$$

(i) Weg C_2: $y \mapsto z = c + \mathrm{i}y$, $0 \le y \le c$, $\quad dz = \mathrm{i}\, dy$

$$I_2 = \left| \int_0^c f(c+\mathrm{i}y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(c+\mathrm{i}y)}\, \mathrm{i}\, dy \right| \le \frac{M}{c} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\, dy = \frac{M}{c\lambda}$$

für $c \ge r$

analoge Abschätzung für $I_4 \quad \rightsquigarrow I_2, I_4 \to 0$ für $c \to \infty$

(ii) C_3: $x \mapsto z = \mathrm{i}c + x$, $c \ge x \ge -c$, $\quad dz = dx$

$$I_3 = \left| \int_c^{-c} f(\mathrm{i}c + x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\mathrm{i}c+x)}\, dx \right| \le \frac{M}{c} \mathrm{e}^{-\lambda c} \left| \int_c^{-c} dx \right| = 2M\, \mathrm{e}^{-\lambda c}$$

für $c \ge r$

$\implies \quad \lim_{c\to\infty} I_3 = 0$

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,dx$$

Polstelle in der oberen Halbebene: $a_1 = \mathrm{i}$
Residuum

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2} = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\mathrm{i}+z} = \frac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{e}}$$

Residuensatz $\quad\Longrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re} \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\mathrm{e}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}$$