Komplexe Taylor-Reihe

Eine in einem Gebiet D analytische Funktion f lässt sich in jedem Punkt $a \in D$ in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \,.$$

Die Reihe konvergiert absolut für

$$|z-a| < r = \left(\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| f^{(n)}(a)/n! \right|^{1/n} \right)^{-1} \,.$$

Der Konvergenzradius r ist gleich dem Abstand des Entwicklungspunktes a zur nächsten Singularität von f, d.h. zum Rand des Analytizitätsgebietes.

Beweis:

(i) Konvergenz für $|z-a| < d = \operatorname{dist}(a, \partial D)$:
C: entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a mit Radius $s < d$
Cauchys Integralformel

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

$\rightsquigarrow$ Abschätzung

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \le \frac{1}{2\pi}(2\pi s)\frac{c}{s^{n+1}} = c\, s^{-n}, \quad c = \max_{w\in C} |f(w)|$$

Betrag des n-ten Summanden der Taylor-Reihe $\le c(|z-a|/s)^n$
$\rightsquigarrow$ majorisierende geometrische Reihe für $|z-a| < s$
$s < d$ beliebig $\implies$
Konvergenz auf der größten in D enthaltenen offenen Kreisscheibe

(ii) Konvergenzradius:

absolute Konvergenz für $|z - a| > d$

$\Longrightarrow$ größeres Analytizitätsgebiet (Potenzreihe definiert eine analytische Funktion)

$\Longrightarrow$ Widerspruch, d.h. Konvergenzradius $d = \operatorname{dist}(a, \partial D)$ ist maximal

eindeutige Charakterisierung des Konvergenzradius

$\Longrightarrow$ Äquivalenz zur Formel aus der Theorie reeller Reihen, d.h. $d = r$

Beispiel:

Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

(i) Pol bei 0:

$$\frac{1}{z} = \frac{-1}{-a-(z-a)} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{-a}} \underset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(-a)^n}$$

Konvergenz für $|z-a| < |a|$

(ii) Pol bei 1:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-a-(z-a)} = \frac{1}{a-1}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} \underset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{a-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n}$$

Konvergenz für $|z-a| < |1-a|$

in beiden Fällen: $|z-a|$ kleiner als der Abstand zur Singularität

Taylor-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{(1-a)^{n+1}} - \frac{-1}{(-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n$$

Konvergenzradius r: Abstand des Entwicklungspunktes a zur näheren Polstelle $z = 0$ oder $z = 1$, d.h.

$$r = \min(|a|, |1-a|)$$