Komplexes Taylor-Polynom

Eine in einem Gebiet D analytische Funktion f wird durch das Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

in jedem Punkt $a \in D$ mit der Ordnung $n+1$ approximiert:

$$|f(z) - p_n(z)| = O\left(|z-a|^{n+1}\right), \quad z \to a\,.$$

Das Restglied besitzt die Integraldarstellung

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} \, dw \right) (z-a)^{n+1} \,,$$

mit einem entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis C in D um a, der z enthält.

Beweis:

(i) Integralformel:
Beweis durch Induktion bzgl. n

- $n = 0$:
  Cauchys Integralformel $\quad \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f(z) - p_0(z) &= f(z) - f(a) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)}\, dw
\end{aligned}
$$

  Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(w) \frac{(w-a)-(w-z)}{(w-a)(w-z)}\, dw = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)(z-a)}{(w-a)(w-z)}\, dw
$$

- $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f(z) - p_{n+1}(z) &= f(z) - p_n(z) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+2}}\, dw \right) (z-a)^{n+1} \end{aligned}$$

aufgrund der Induktionsvoraussetzung und Cauchys Integralformel

Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \frac{(w-a)-(w-z)}{(w-a)(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1} =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+2}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+2}$$

(ii) Abschätzung:
C: Kreis um a mit Radius $r < \operatorname{dist}(a, \partial D)$
Darstellung des Restglieds für $|z-a| < r \quad \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
|f(z) - p_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} \, dw \, (z-a)^{n+1} \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}(2\pi r) \frac{|z-a|^{n+1}}{r^{n+1}(r - |z-a|)} \max_{|w-a|=r} |f(w)| \\
&= O\left(|z-a|^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$