Stammfunktion

Ist f in einem Gebiet D komplex differenzierbar, so gilt für einen in D verlaufenden Weg C von z_0 nach z_1

$$\int_C f' \, dz = f(z_1) - f(z_0) \, .$$

Insbesondere ist also das komplexe Kurvenintegral für Funktionen mit komplexer Stammfunktion wegunabhängig und verschwindet für einen geschlossenen Weg.

Beweis:

Weg von z_0 nach z_1

$$C:\ t \mapsto z(t),\ t_0 \le t \le t_1$$

Definition des komplexen Kurvenintegrals $\quad \rightsquigarrow$

$$\int\limits_C f'\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f'(z(t))z'(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(f(z(t))\right)\,dt = f(z_1) - f(z_0)$$

letzte Gleichheit nach Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung
(Aufspaltung von f in Real- und Imaginärteil)

Beispiel:

Kurvenintegral von $f(z) = \mathrm{e}^z$ über $C: \ z(t) = 1 + t(1+\mathrm{i}), \ t \in [0,1]$

- Direkte Berechnung:
  $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t, \ dz = (1+\mathrm{i})\, dt \quad \rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_C \mathrm{e}^z dz &= \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{1+t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t)(1+\mathrm{i})dt \\
&= \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{1+t}(\cos t - \sin t)dt + \mathrm{i} \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{1+t}(\cos t + \sin t)dt \\
&= \left[\mathrm{e}^{1+t}\cos t\right]_0^1 + \mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{1+t}\sin t\right]_0^1 \\
&= \left(\mathrm{e}^2\cos(1) - \mathrm{e}\right) + \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^2\sin(1) - 0\right) = \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}} - \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

- Differenz der Werte der Stammfunktion:

$$f = F', \quad F(z) = \mathrm{e}^z$$

C : geradliniger Weg von $z = 1$ nach $z = 2 + \mathrm{i}$
Existenz der Stammfunktion $\quad \Longrightarrow$

$$\int_C \mathrm{e}^z \, dz = [\mathrm{e}^z]_{z(0)=1}^{z(1)=2+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}} - \mathrm{e}$$

(gleiches Resultat)