Singularitäten einer komplexen Funktion

Ist eine komplexe Funktion f in der Umgebung $D\backslash a$ eines Punktes a analytisch, so lässt sich der Typ der Definitionslücke wie folgt klassifizieren.

- Schwache Singularität:

  $$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0\,,$$

  aufgrund der Cauchyschen Integralformel immer hebbar

- Pol n-ter Ordnung:

  $$|(z-a)^n f(z)| = O(1), \quad z \to a,$$

  $n \in \mathbb{N}$ minimal

- wesentliche Singularität:

  $$(z-a)^n f(z) \neq O(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Man beachte, dass die Klassifizierung nicht auf Funktionen wie $\mathrm{Ln}(z-a)$ oder $\sqrt{z-a}$ anwendbar ist, da in keinem Kreisring um a eine konsistente stetige Definition möglich ist.

Beispiel:

verschiedene Singularitäten bei $z = 0$

- Schwache Singularität, z.B.

  $$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

  denn $|zf(z)| \to |\sin(0)| = 0$ für $z \to 0$
- Pol zweiter Ordnung, z.B.

  $$f(z) = \frac{\cos z}{z^2},$$

  denn $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \cos 0 = 1$ und $z\, f(z) = \cos z \,/\, z \to \infty$ für $z \to 0$
- Wesentliche Singularität, z.B.

  $$f(z) = \exp(1/z),$$

  denn $t^n \exp(1/t) \to \infty$, $t \to 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$