Singulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

hat bei $z = a$ einen regulären singulären Punkt, wenn q/r einen Pol höchstens erster und p/r einen Pol höchstens zweiter Ordnung bei $z = a$ haben. In einem regulären singulären Punkt a wird das Verhalten der Lösungen u durch die charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$$

bestimmt, wobei q_0 und p_0 die führenden Koeffizienten von q/r bzw. p/r sind, d.h.

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \frac{q_0 + q_1(z-a) + \cdots}{z-a}, \quad \frac{p(z)}{r(z)} = \frac{p_0 + p_1(z-a) + \cdots}{(z-a)^2}\,.$$

Ist die Differenz der Nullstellen α, β von φ nicht ganzzahlig, so existieren zwei linear unabhängige Lösungen

$$(z-a)^\alpha v(z), \quad (z-a)^\beta w(z)\,,$$

wobei v und w in einer Umgebung von a analytische Funktionen mit $v(a), w(a) \neq 0$ sind.
Sonst existiert im Allgemeinen nur eine Lösung dieses Typs zu dem Exponenten α mit dem größten Realteil. Eine zweite Lösung kann dann durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz

$$u(z) = c(z)(z-a)^\alpha v(z)$$

bestimmt werden.

Beweis:

formale Rechtfertigung des Lösungstyps, o.B.d.A. $a = 0$, $r(z) = 1$
Ansatz

$$u(z) = z^\lambda(u_0 + u_1 z + \cdots)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
u''(z) &= \lambda(\lambda-1)u_0 z^{\lambda-2} + (\lambda+1)\lambda u_1 z^{\lambda-1} + \cdots \\
\frac{1}{z}u'(z)q(z) &= \left(\lambda u_0 z^{\lambda-2} + (\lambda+1)u_1 z^{\lambda-1} + \cdots\right)(q_0 + q_1 z + \cdots) \\
\frac{1}{z^2}u(z)p(z) &= \left(u_0 z^{\lambda-2} + u_1 z^{\lambda-1} + \cdots\right)(p_0 + p_1 z + \cdots)
\end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten von $z^{\lambda-2}$ $\rightsquigarrow$ charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda)u_0 = 0$$

Nullstellen λ von φ $\quad\rightsquigarrow\quad$ nicht triviale Lösungen ($u_0 \neq 0$)
Vergleich der Koeffizienten von $z^{\lambda-2+k} \rightsquigarrow$ Rekursion

$$\varphi(\lambda+k)u_k = \psi(u_0,\ldots,u_{k-1}), \quad k>0,$$

mit

$$\begin{aligned}\psi(u_0,\ldots,u_{k-1}) &= -(\lambda q_k u_0 + (\lambda+1)q_{k-1}u_1 + \cdots + (\lambda+k-1)q_1 u_{k-1}) \\ &\quad -(p_k u_0 + p_{k-1}u_1 + \cdots + p_1 u_{k-1})\end{aligned}$$

$q_\nu u_{k-\nu}$, $p_\nu u_{k-\nu}$: Summe der Indizes $= k$ $\quad\Longrightarrow\quad$ Koeffizient von $z^\nu z^{k-\nu+\lambda-2} = z^{\lambda-2+k}$
Koeffizienten sukzessive bestimmbar, falls $\varphi(\lambda+k) \neq 0 \ \forall\ k$
Bei ganzzahliger Differenz der Nullstellen α, β von φ,

$$\alpha = \beta + m \,\mathrm{mit}\, m \in \mathbb{N}$$

ist dies nur für den Exponenten α mit größerem Realteil möglich.
Für den anderen Exponenten β ist die Rekursionsgleichung

$$\varphi(\beta+m)u_m = \psi(u_0,\ldots,u_{m-1}$$

nur erfüllbar, falls die rechte Seite ebenfalls null ist.

Beispiel:

Euler-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + qz\, u'(z) + p\, u(z) = 0$$

$z = 0$: regulärer singulärer Punkt
Ansatz

$$u(z) = z^\lambda$$

Einsetzen $\quad\rightsquigarrow\quad$ charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q\lambda + p = \lambda^2 + (q-1)\lambda + p = 0$$

drei qualitativ verschiedene Fälle je nach Typ der Nullstellung von φ

(i) Verschiedene Exponenten $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
z.B. $q = 0$, $p = -6$, d.h.

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3$$

Lösung

$$u(z) = c_1\, frac1z^2 + c_2\, z^3$$

Probe:

$$z^2 u'' - 6u = z^2 \left(c_1\,(6/z^4) + c_2\,(6z)\right) - 6\left(c_1/z^2 + c_2\, z^3\right) \quad \checkmark$$

(ii) Ein Exponent $\lambda_1 = \lambda_2$:
z.B. $q = -1$ und $p = 1$, d.h. $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ mit der Nullstelle $\lambda = 1$ und der Lösung

$$u(z) = c\ z$$

zweite Lösung durch Variation der Konstanten: Ansatz $u(z) = c(z)z \quad \rightsquigarrow$

$$z^2(c\,z)'' - z(c\,z)' + c\,z = 0$$

und nach Vereinfachung

$$0 = c''\,z + c' = (c'\,z)'$$

mit der Lösung $c(z) = c_1 + c_2 \operatorname{Ln} z$ d.h.

$$u(z) = (c_1 + c_2 \operatorname{Ln} z)\,z$$

(iii) Komplex konjugierte Exponenten:
z.B. $q = 0$, $p = 5/4$, d.h. $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 5/4$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}$$

Lösung

$$u(z) = c_1\, z^{1/2+\mathrm{i}} + c_2\, z^{1/2-\mathrm{i}} = \sqrt{z}\ \left(c_1\, z^{\mathrm{i}} + c_2\, z^{-\mathrm{i}}\right)$$

reelle Lösung für reelles $z > 0$ mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre:

$$z^{\pm\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\, z} = \cos\left(\mathrm{Ln}\, z\right) \pm \mathrm{i} \sin\left(\mathrm{Ln}\, z\right)$$

$c_1 = c_2 = 1/2$ bzw. $c_1 = -c_2 = 1/(2\mathrm{i})$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ linear unabhängige Lösungen

$$\sqrt{z}\, \cos\left(\mathrm{Ln}\, z\right), \quad \sqrt{z}\, \sin\left(\mathrm{Ln}\, z\right)$$