

Satz von Liouville

Eine analytische Funktion f , die auf ganz \mathbb{C} beschränkt ist, d.h.

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = c < \infty,$$

ist konstant.

Beweis:

Abschätzung für die komplexe Ableitung \implies

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{|w-z|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r} c$$

für einen Kreis um z mit Radius r

Grenzwertbildung $r \rightarrow \infty \implies$

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

d.h. f ist konstant