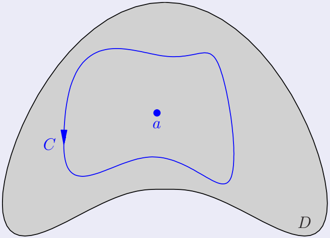
Residuum

Für eine in einer punktierten Kreisscheibe $D\backslash\{a\}$ analytische Funktion f definiert man das Residuum im Punkt a als

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{a} f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{C} f(z)\, dz\,,$$

wobei $C: t \mapsto a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ein entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis in D ist.



Hat f bei a eine Polstelle n-ter Ordnung, d.h.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$$

mit einer in D analytischen Funktion g, so ist

$$\operatorname*{Res}_a f = c_{-1}\,.$$

Dies gilt allgemeiner für eine in D absolut konvergente Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,,$$

d.h. $\operatorname{Res}_a f = c_{-1}$ auch im Falle einer wesentlichen Singularität.

Beweis:

(i) Unabhängigkeit vom gewählten Kreis C:
zwei entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte Kreise

$$C_k:\ t \mapsto z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

mit $r_0 < r_1$ beranden einen Kreisring R: $\partial R = C_1 - C_0$
Cauchys Theorem $\quad\Longrightarrow$

$$0 = \int_{C_1 - C_0} f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz$$

d.h. die Unabhängigkeit vom gewählten Radius r

(ii) Konsistenz der Definition für die Spezialfälle:
$(z-a)^n$, $n \neq -1$, besitzt die Stammfunktion $(z-a)^{n+1}/(n+1)$ $\implies$

$$\int_C (z-a)^n \, dz = 0$$

Cauchys Theorem für eine analytische Funktion g $\implies$

$$\int_C g(z) \, dz = 0$$

$\implies$

$$\operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{c_{-1}}{z-a} \, dz = c_{-1} \underbrace{n(C,a)}_{\text{Umlaufzahl}} = c_{-1}$$

sowohl für Polstellen als auch für wesentliche Singularitäten mit konvergenten Laurent-Entwicklungen

Beispiel:

typische Fälle

- Rationale Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

Residuen an den Polstellen: $\operatorname*{Res}_0 f = -1$ und $\operatorname*{Res}_0 f = 1$

- Funktion mit einer wesentlicher Singularität:

$$f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$$

Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

Residuum: $\operatorname*{Res}_0 f = 1$

- Funktion mit expliziter Stammfunktion:

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2}, \quad F(z) = \cos(1/z)$$

Integral über geschlossene Kurven null,

$$\int_C f\,dz = 0\,,$$

$$\implies \quad \operatorname*{Res}_0 f = 0$$

Berechnung von Residuen

Für eine einfache Polstelle a einer Funktion f gilt

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

und für eine Polstelle n-ter Ordnung ist

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-a)^n f(z)) \right] .$$

Beweis:

(i) Einfache Polstelle:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{g(z)}_{\text{analytisch}}\,, \quad \operatorname*{Res}_a f = c_{-1}$$

Übereinstimmung mit

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\left(c_{-1} + (z-a)g(z)\right) = c_{-1}$$

(ii) Polstelle n-ter Ordnung:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{g(z)}_{\text{analytisch}}\,, \quad \operatorname*{Res}_a f = c_{-1}$$

alternative Formel für $\operatorname*{Res}_a f$

$$(d/dz)^{n-1}\left((z-a)^n f(z)\right) = (d/dz)^{n-1}\left(\cdots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n g(z)\right)$$

$\to (n-1)!\, c_{-1}$ für $z \to a$, d.h. Bilden des Grenzwertes liefert ebenfalls $\operatorname*{Res}_a f = c_{-1}$

Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}$$

Polstellen:

zweiter Ordnung bei $z = 0$, erster Ordnung bei $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

(i) Doppelte Polstelle:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{0} f &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{d}{dz} \frac{z}{\sin z} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} \\
&\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - \cos z + z \sin z}{2\cos z \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{2\cos z} = 0
\end{aligned}$$

(ii) Einfache Polstellen:

$$\operatorname*{Res}_{k\pi} f = \lim_{z\to k\pi} \frac{z - k\pi}{z \sin z} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{\sin z + z\cos z} = \frac{(-1)^k}{k\pi}$$