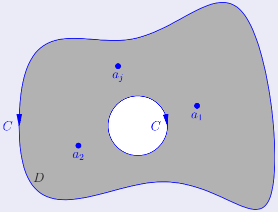
Residuensatz

Sei D ein beschränktes Gebiet, dessen Rand sich aus entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten (Gebiet liegt „links“) stückweise stetig differenzierbaren Kurven C_k zusammensetzt.

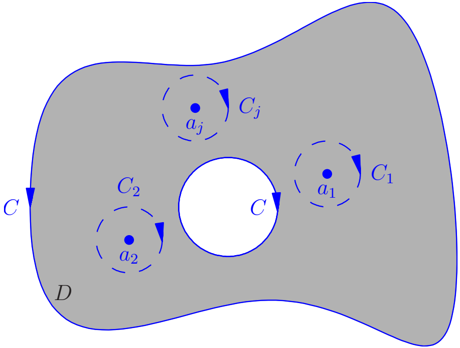


Dann gilt für eine in $\overline{D}$ stetige und in D bis auf endlich viele Singularitäten a_j analytische Funktion f

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_j} f, \quad C = \sum_k C_k\,.$$

Beweis:

$C_j \subset D$: im Uhrzeigersinn orientierter Kreis um a_j



f analytisch auf dem durch $C + C_1 + \cdots + C_n$ berandeten Gebiet

Cauchys Theorem $\quad \Longrightarrow$

$$0 = \int\limits_{C+C_1+\cdots+C_n} f(z)\,dz = \int\limits_{C} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{C_j} f(z)\,dz$$

Definition des Residuums $\quad \Longrightarrow$

$$\int\limits_{C_j} f(z)\,dz = -2\pi\mathrm{i}\,\operatorname*{Res}_{a_j} f$$

(Minus-Zeichen aufgrund der Orientierung der Kreise)
Einsetzen in die Identität für $\int_{C+C_1+\cdots+C_n} \ldots \quad \rightsquigarrow \quad$ behauptete Formel

Beispiel:

illustriere den Residuensatz für

$$f(z) = \frac{1-z}{z^2+z^3} = \frac{1-z}{z^2(1+z)}$$

und C den entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Kreis um 0 mit Radius 2

(i) $z = 0$: Polstelle zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_0 f &= \lim_{a\to 0} \frac{1}{1!}\, \frac{d}{dz}(z^2 f(z))\Big|_{z=0} = \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right)\Big|_{z=0} \\ &= -\frac{2}{(1+z)^2}\Big|_{z=0} = -2\end{aligned}$$

(ii) $z = -1$: einfache Polstelle

$$\operatorname*{Res}_{-1} f = \lim_{z\to -1}(1+z)f(z) = \frac{1-z}{z^2}\Big|_{z=-1} = 2$$

Residuensatz $\quad\Longrightarrow$

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,(\operatorname*{Res}_0 f + \operatorname*{Res}_{-1} f) = 2\pi\mathrm{i}\,(-2+2) = 0$$