Regulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei $z = a$ regulär, wenn q/r und p/r in einer Umgebung von a analytisch sind.
In einem regulären Punkt a existiert zu beliebigen Werten $u(a) = u_0$, $u'(a) = u_1$ eine eindeutige, in einer Umgebung von a analytische Lösung u.
Insbesondere existieren zwei linear unabhängige Lösungen zu den Werten

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 1$$

und

$$u(a) = 1, \quad u'(a) = 0\,.$$

Beweis:

Division durch $r \quad \rightsquigarrow \quad r = 1$, Verschiebung $\quad \rightsquigarrow \quad$ o.B.d.A. $a = 0$

Entwicklungen der Koeffizienten

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \cdots, \quad q(z) = q_0 + q_1 z + \cdots$$

mit $|p_j|, |q_j| \le cs^j$ für ein $s > 0$

formaler Ansatz

$$\begin{aligned} u(z) &= u_0 + u_1 z + \cdots + u_n z^n + \cdots \\ u'(z) &= u_1 + 2u_2 z + \cdots + (n+1)u_{n+1} z^n + \cdots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich der Entwicklungen

$$\begin{aligned} p(z)u(z) &= p_0 u_0 + (p_1 u_0 + p_0 u_1)z + \cdots + (p_n u_0 + \cdots + p_0 u_n)z^n + \cdots \\ q(z)u'(z) &= q_0 u_1 + (q_1 u_1 + 2q_0 u_2)z + \cdots \\ &\quad + (q_n u_1 + 2q_{n-1} u_2 + \cdots + (n+1)q_0 u_{n+1})z^n + \cdots \\ u''(z) &= 2u_2 + 6u_3 z + \cdots + (n+2)(n+1)u_{n+2} z^n + \cdots \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Rekursion für die Koeffizienten von u:

$$\begin{aligned} 2u_2 &= -q_0 u_1 - p_0 u_0 \\ 6u_3 &= -(q_1 u_1 + 2q_0 u_2) - (p_1 u_0 + p_0 u_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

allgemein

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)u_{n+2} &= -(q_n u_1 + \cdots + (n+1)q_0 u_{n+1}) \\ &\quad -(p_n u_0 + \cdots + p_0 u_n) \end{aligned}$$

Koeffizienten sukzessive aus $u_0 = u(0)$ und $u_1 = u'(0)$ eindeutig berechenbar

zeige induktiv

$$|u_j| \le dt^j$$

($\Longrightarrow$ Analytizität mit Konvergenzradius $\ge 1/t$)

- Induktionsanfang: Wahl von d $\quad \rightsquigarrow$

$$|u_0| \le d, \quad |u_1| \le dt \quad \checkmark$$

- Induktionsschritt: Rekursion $\quad \Longrightarrow$

$$|u_{n+2}| \le \frac{cd}{(n+1)(n+2)} \left(s^n t^1 + \cdots + (n+1)s^0 t^{n+1} + s^n t^0 + \cdots + s^0 t\right.$$

$t \ge s$, $1 + \cdots + (n+1) = (n+1)(n+2)/2 \quad \rightsquigarrow$

$$|u_{n+2}| \le cd \left(\frac{t^{n+1}}{2} + \frac{t^n}{(n+2)}\right) \le cd \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{t^2}\right) t^{n+2}$$

$\le dt^{n+2}$, falls

$$c \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{t^2}\right) \le 1$$

erfüllt für hinreichend großes t

Konvergenzradius u.U. zu klein
optimales $1/t$: Minimum der Konvergenzradien von p und q

Beispiel:

(i) Legendre-Differentialgleichung:

$$(1 - z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \alpha(\alpha + 1)u(z) = 0$$

$(q/r)(z) = -(2z)/(1 - z^2)$, $(p/r)(z) = \alpha(\alpha + 1)/(1 - z^2) \quad \Longrightarrow$
Regularität für $z \neq \pm 1$

(ii) Bessel-Differentialgleichung:

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$$

$(q/r)(z) = 1/z$, $(p/r)(z) = (z^2 - \alpha^2)/z^2 \quad \Longrightarrow$
Regularität für $z \neq 0$

Beispiel:

Legendre-Differentialgleichung

$$(1-z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \alpha(\alpha+1)u(z) = 0$$

Ansatz

$$u(z) = u_0 + u_1 z + \cdots$$

Koeffizientenvergleich

$$z^n:\ (n+2)(n+1)u_{n+2} - n(n-1)u_n - 2nu_n + \alpha(\alpha+1)u_n = 0$$

$\rightsquigarrow$ Rekursion

$$u_{n+2} = \frac{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)}{(n+1)(n+2)} u_n = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)} u_n$$

$u(0) = 1,\ u'(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ ungerade Koeffizienten null und

$$u_0 = 1, \quad u_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2}, \quad u_4 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

allgemein

$$u_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha \cdots (\alpha - 2n + 2)(\alpha+1)\cdots(\alpha + 2n - 1)}{(2n)!}\,.$$

$\alpha \geq 0$ gerade oder $\alpha < 0$ ungerade $\quad \rightsquigarrow \quad$ Polynom

$$\begin{aligned}
\alpha = 0 \text{ (oder } \alpha = -1) \quad &\to \quad u(z) = 1 \\
\alpha = 2 \text{ (oder } \alpha = -3) \quad &\to \quad u(z) = 1 - 3z^2 \\
\alpha = 4 \text{ (oder } \alpha = -5) \quad &\to \quad u(z) = 1 - 10z^2 + \frac{35}{3}z^4
\end{aligned}$$

$u(0) = 0,\ u'(0) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ gerade Koeffizienten null und

$$u_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha - 1)\cdots(\alpha - 2n + 1)(\alpha + 2)\cdots(\alpha + 2n)}{(2n+1)!}$$

$\alpha > 0$ ungerade oder $\alpha < 0$ gerade $\quad \rightsquigarrow \quad$ Polynom

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 \text{ (oder } \alpha = -2) \quad &\to \quad u(z) = z \\
\alpha = 3 \text{ (oder } \alpha = -4) \quad &\to \quad u(z) = z - \frac{5}{3} z^3 \\
\alpha = 5 \text{ (oder } \alpha = -6) \quad &\to \quad u(z) = z - \frac{14}{3} z^3 + \frac{21}{5} z^5
\end{aligned}$$