Residuenkalkül für rationale Integranden

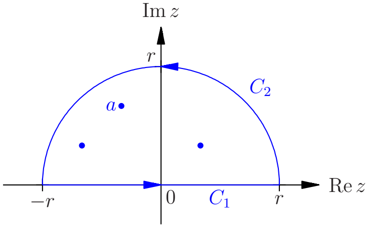
Für eine rationale Funktion f ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a f\,,$$

wobei die Residuen an allen Polstellen in der oberen Halbebene summiert werden.

Alternativ kann man über die Polstellen in der unteren Halbebene summieren. Dabei ändert sich aufgrund der entgegengesetzten Orientierung das Vorzeichen der Summe. Dies zeigt insbesondere, dass die Summe aller Residuen von f null ist.

Beweis:



r so groß, dass alle Polstellen a mit $\operatorname{Im} a > 0$ von f im Halbkreis $C = C_1 + C_2$ liegen

Residuensatz $\implies$

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname*{Res}_a f$$

zeige: $|\int_{C_2} f| \to 0$ für $r \to \infty$

Halbkreis

$$C_2: \quad z(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le \pi$$

Zählergrad von f um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad $\implies$

$$\lim_{|z|\to\infty} z^2 f(z) = M \qquad (|M| < \infty)$$

und mit $\tilde{M} = 2|M| + 1$ gilt

$$|f(z)| \le \frac{\widetilde{M}}{|z|^2}, \quad |z| \ge r_0$$

für hinreichend großes r_0

$\rightsquigarrow$ Abschätzung

$$\left| \int_{C_2} f \right| = \left| \int_0^\pi f(\underbrace{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}_{z})\, \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt \right| \le \pi \frac{\widetilde{M}}{r^2}\, r \to 0$$

Beispiel:

Integral über $\mathbb{R}$ von

$$f(z) = \frac{1}{1+z^6}$$

einfache Polstellen: $a_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6 + 2\pi k/6)}$, $k = 0, \ldots, 5$
a_0, a_1, a_2 in der oberen Halbebene mit Residuen

$$\operatorname*{Res}_{a_k} f = \lim_{z \to a_k} \frac{(z - a_k)}{1 + z^6} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z \to a_k} \frac{1}{6z^5} = \lim_{z \to a_k} \frac{z}{6z^6} = -\frac{a_k}{6}$$

$(z^6 = -1)$
Residuensatz $\implies$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=0}^{2} \operatorname*{Res}_{a_k} f = 2\pi\mathrm{i} \left(-\frac{1}{6}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} + \mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) \\ &= 2\pi/3 \end{aligned}$$

Beispiel:

Integral über $\mathbb{R}$ von

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^n(z+\mathrm{i})^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Polstelle in der oberen Halbebene: $a = \mathrm{i}$, n-fach

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{\mathrm{i}} f &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left((z-\mathrm{i})^n f(z)\right)\Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(z+\mathrm{i})^{2n-1}}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\,\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{i}}{2^{2n-1}\mathrm{i}^{2n}} = -\mathrm{i}\binom{2n-2}{n-1}2^{1-2n}
\end{aligned}$$

Residuensatz $\quad \Longrightarrow$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\,\underset{\mathrm{i}}{\operatorname{Res}}\, f = \pi\binom{2n-2}{n-1}2^{2-2n}$$