

Potenzen einer komplexen Zahl

Um Potenzen komplexer Zahlen zu bilden, verwendet man am geeignetsten die Polarform $z = re^{i\varphi}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$z^m = r^m e^{im\varphi}.$$

Die gleiche Formel bleibt auch für rationale Exponenten $m = p/q \in \mathbb{Q}$ richtig, allerdings ist das Ergebnis aufgrund der Mehrdeutigkeit der q -ten Einheitswurzel nicht eindeutig. Da die Gleichung $w^q = 1$ die q Lösungen

$$w = w_q^k, \quad w_q = \exp(2\pi i/q), \quad k = 0, \dots, q-1$$

besitzt, erhält man entsprechend

$$r^{p/q} \exp(ip\varphi/q) w_q^{kp}, \quad k = 0, \dots, q-1$$

als mögliche Werte für $z^{p/q}$.

Beispiel:

$$z = (-1 + i)^{2/3}$$

Polarform: $r = \sqrt{1+1}$, $\varphi = \arctan(1/(-1)) + \pi = 3\pi/4 \rightsquigarrow$

$$\left(\sqrt{2} \exp(3\pi i/4)\right)^{2/3} = \sqrt[3]{2} \exp(\pi i/2) w_3^{2k}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_3 = \exp(2\pi i/3)$$

mögliche Werte:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} i \exp(4\pi i/3) = \sqrt[3]{2} (\sqrt{3}/2 - i/2)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} i \exp(8\pi i/3) = \sqrt[3]{2} \left(-\sqrt{3}/2 - i/2\right)$$

Bestätigung durch Probe:

$$z_1^3 = \left(\sqrt[3]{2} i \exp(4\pi i/3) \right)^3 = 2i^3 \underbrace{\exp(4\pi i)}_{=1} = -2i = (-1 + i)^2$$

d.h. $z_1 = (-1 + i)^{2/3}$

Probe für z_0 und z_2 analog

Beispiel:

unendlich viele Lösungen für irrationale oder imaginäre Exponenten

- unendlich viele Lösungen auf dem Einheitskreis:

$$\begin{aligned}i^\pi &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)i)^\pi \\ &= \exp(i[\pi^2/2 + 2\pi^2 k]), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf einer Halbgeraden:

$$\begin{aligned}\pi^i &= \exp(\ln \pi + 2\pi ki)^i = \exp(i \ln \pi - 2\pi k) \\ &= \exp(-2\pi k) \exp(i \ln \pi), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf der positiven reellen Achse:

$$\begin{aligned}i^i &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)i)^i \\ &= \exp(-\pi/2 - 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$