Möbius-Transformation

Eine linear rationale Funktion

$$f: \quad z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0\,,$$

wird als Möbius-Transformation bezeichnet. Dabei dürfen z und w Werte in $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ annehmen.

Die Umkehrabbildung ist

$$w \mapsto z = \frac{-dw+b}{cw-a}\,.$$

Eine Möbius-Transformation bildet Kreise auf Kreise ab, wobei eine Gerade als entarteter Kreis anzusehen ist. Sie ist durch die Bilder w_k von drei Punkten z_k eindeutig bestimmt und kann mit Hilfe des Doppelverhältnisses in der Form

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

angegeben werden. Diese Identität kann nach z oder w aufgelöst werden, wobei die Konvention $\frac{\infty}{\infty} = 1$ zu verwenden ist.

Beweis:

(i) Umkehrabbildung:
Auflösen nach $z \quad \rightsquigarrow \quad$ gebrochen rationaler Ausdruck gleichen Typs

(ii) Invarianz von Kreisen:
allgemeine Darstellung eines Kreises

$$s = \left| \frac{z - p}{z - q} \right|$$

Einsetzen von $z = (-dw + b)/(cw - a) \quad \rightsquigarrow \quad$ Darstellung der Bildmenge

$$s = \left| \frac{(-dw + b) - p(cw - a)}{(-dw + b) - q(cw - a)} \right| = \left| \frac{-d - pc}{-d - qc} \right| \left| \frac{w - \tilde{p}}{w - \tilde{q}} \right|$$

$\rightsquigarrow \quad$ Kreis in der w-Ebene

(iii) Doppelverhältnis:
Identität richtig für $(w, z) = (w_k, z_k),\ k = 1, 2, 3$
Auflösen nach z oder $w \quad \rightsquigarrow \quad$ linear rationale Funktion

Beispiel:

Berechnung der durch

$$1 \mapsto 0, \quad 0 \mapsto 1, \quad \mathrm{i} \mapsto \infty$$

bestimmten Möbius-Transformation

(i) Doppelverhältnis:

$$\frac{w-1}{w-\infty} : \frac{0-1}{0-\infty} = \frac{z-0}{z-\mathrm{i}} : \frac{1-0}{1-\mathrm{i}}$$

Vereinfachung und Auflösen nach $w \quad \rightsquigarrow$

$$(w-1)\ \underbrace{\frac{\infty}{w-\infty}}_{=\frac{\infty}{-\infty}=-1} = \frac{z}{z-\mathrm{i}}\,(1-\mathrm{i})$$

und

$$w = 1 - \frac{(1-\mathrm{i})z}{z-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$$

(ii) Einsetzen der Funktionswerte in die Abbildungsgleichung:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{rcccccc} f(1) & = & \dfrac{a+b}{c+d} & = & 0 & \Longrightarrow & a = -b \\ f(0) & = & \dfrac{b}{d} & = & 1 & \Longrightarrow & d = b \\ f(\mathrm{i}) = \dfrac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d} & = & \dfrac{a\mathrm{i}-a}{c\mathrm{i}-a} & = & \infty & \Longrightarrow & c = -\mathrm{i}a \end{array}$$

Wahl von $a = \mathrm{i}$ $\rightsquigarrow$

$$c = 1, \quad b = -\mathrm{i}, \quad d = -\mathrm{i}$$

d.h. die obige Form für f