Mittelwerteigenschaft

Für eine auf einer Kreisscheibe um z mit Radius $> r$ komplex differenzierbare Funktion ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, dt\,.$$

Diese Identität gilt auch separat für Real- und Imaginärteil von f, insbesondere also auch für harmonische Funktionen.

Beweis:

Cauchysche Integralformel für den Kreis

$$C:\ t \mapsto w = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad dw = \mathrm{i}\, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, dt \end{aligned}$$